Teoria operatorów w klasycznym problemie momentów

Jan Stochel

Kraków 2011

- Ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazywamy jest ciągiem *momentów Hamburgera* jeśli istnieje dodatnia miara borelowska μ na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ taka że

$$a_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \,\mathrm{d}\mu(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazywamy jest ciągiem *momentów Hamburgera* jeśli istnieje dodatnia miara borelowska μ na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ taka że

$$a_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \,\mathrm{d}\mu(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Miara μ nazywana jest *miarą reprezentującą* ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Hamburger moment problem

- Ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazywamy jest ciągiem *momentów Hamburgera* jeśli istnieje dodatnia miara borelowska μ na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ taka że

$$a_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \, \mathrm{d}\mu(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Miara μ nazywana jest *miarą reprezentującą* ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.
- Mówimy że ciąg momentów Hamburgera jest *niezdeterminowany* jeśli ma więcej niż jedną miarę reprezentującą.

Hamburger moment problem

- Ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazywamy jest ciągiem *momentów Hamburgera* jeśli istnieje dodatnia miara borelowska μ na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ taka że

$$a_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \,\mathrm{d}\mu(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Miara μ nazywana jest *miarą reprezentującą* ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.
- Mówimy że ciąg momentów Hamburgera jest *niezdeterminowany* jeśli ma więcej niż jedną miarę reprezentującą.
- W przeciwnym wypadku, mówimy że jest *zdeterminowany*.

Hamburger moment problem

- Ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazywamy jest ciągiem *momentów Hamburgera* jeśli istnieje dodatnia miara borelowska μ na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ taka że

$$a_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \, \mathrm{d}\mu(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Miara μ nazywana jest *miarą reprezentującą* ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.
- Mówimy że ciąg momentów Hamburgera jest *niezdeterminowany* jeśli ma więcej niż jedną miarę reprezentującą.
- W przeciwnym wypadku, mówimy że jest *zdeterminowany*.
- Każdy ciąg momentów Hamburgera posiadający miarę reprezentującą o zwartym nośniku jest zdeterminowany.

Klasyczny przykład

- Najstarszy i najbardziej znany przykład został podany przez Stieltjesa (1894-1895).

Klasyczny przykład

- Najstarszy i najbardziej znany przykład został podany przez Stieltjesa (1894-1895).
- Następująca formuła

$$e^{(n+1)^2/4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^n x^{-\ln x} [1 + \theta \sin(2\pi \ln x)] \, \mathrm{d}x, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

definiuje ciąg momentów Hamburgera który ma nieskończenie wiele miar reprezentujących parametryzowanych przez $\theta \in [-1, 1]$, wszystkie równoważne mierze Lebesguea.

Klasyczny przykład

- Najstarszy i najbardziej znany przykład został podany przez Stieltjesa (1894-1895).
- Następująca formuła

$$e^{(n+1)^2/4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^n x^{-\ln x} [1 + \theta \sin(2\pi \ln x)] \, \mathrm{d}x, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

  definiuje ciąg momentów Hamburgera który ma nieskończenie wiele miar reprezentujących parametryzowanych przez $\theta \in [-1, 1]$, wszystkie równoważne mierze Lebesguea.
- Dlaczego?

$$\int_0^\infty x^n x^{-\ln x} \sin(2\pi \ln x)] \, \mathrm{d}x = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Klasyczny przykład 2

- Rozważmy rozkład log-normalny na otwartym przedziale $(0, \infty)$:

$$d_\sigma(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} x^{-1} \exp\Big(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}\Big), \quad \sigma > 0.$$

Klasyczny przykład 2

- Rozważmy rozkład log-normalny na otwartym przedziale $(0, \infty)$:

$$d_\sigma(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} x^{-1} \exp\Big(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}\Big), \quad \sigma > 0.$$

- Wtedy

$$s_p(d_\sigma) := \int_0^\infty x^p d_\sigma(x) dx = e^{\frac{1}{2}p^2\sigma^2}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Klasyczny przykład 2

- Rozważmy rozkład log-normalny na otwartym przedziale $(0, \infty)$:

$$d_\sigma(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} x^{-1} \exp\Big(-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}\Big), \quad \sigma > 0.$$

- Wtedy

$$s_p(d_\sigma) := \int_0^\infty x^p d_\sigma(x) dx = e^{\frac{1}{2}p^2\sigma^2}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

- W szczególności mamy

  - $$q^{-\frac{1}{2}n^2} = \int_0^\infty x^n d_\sigma(x) dx = s_n(d_\sigma), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie $0 < q < 1$ jest dane wzorem $q = e^{-\sigma^2}$.

Klasyczny przykład 3

- Stieltjes wykazał że wszystkie gęstości

$$d_\sigma(x)\Big[1+\theta\sin\Big(\frac{2\pi}{\sigma^2}\ln x\Big)\Big], \quad \theta\in[-1,1],$$

mają te same gęstości $\{q^{-\frac{1}{2}n^2}\}_{n=0}^{\infty}$, $q=e^{-\sigma^2}$.

Klasyczny przykład 3

- Stieltjes wykazał że wszystkie gęstości

$$d_\sigma(x)\left[1+\theta\sin\left(\frac{2\pi}{\sigma^2}\ln x\right)\right],\quad \theta\in[-1,1],$$

  mają te same gęstości $\{q^{-\frac{1}{2}n^2}\}_{n=0}^{\infty}$, $q=e^{-\sigma^2}$.

- Chihara [1970] a później Leipnik [1981] znaleźli rodzinę dyskretnych miar reprezentujących ciąg $\{q^{-\frac{1}{2}n^2}\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\lambda_a=\frac{1}{L(a)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k q^{\frac{1}{2}k^2}\delta_{aq^k},\quad a>0,$$

  gdzie

$$L(a)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k q^{\frac{1}{2}k^2}.$$

Klasyczny przykład 4

- Istotnie, używając niezmienniczości miary liczącej ze względu na translacje, otrzymujemy

$$\int_0^\infty x^n d\lambda_a(x) = \frac{1}{L(a)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k q^{\frac{1}{2}k^2} (aq^k)^n$$
$$= \frac{q^{-\frac{1}{2}n^2}}{L(a)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k+n} q^{\frac{1}{2}(k+n)^2}$$
$$= \frac{q^{-\frac{1}{2}n^2}}{L(a)} L(a) = q^{-\frac{1}{2}n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Klasyczny przykład 4

- Istotnie, używając niezmienniczości miary liczącej ze względu na translacje, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^n d\lambda_a(x) &= \frac{1}{L(a)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k q^{\frac{1}{2}k^2} (aq^k)^n \\ &= \frac{q^{-\frac{1}{2}n^2}}{L(a)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k+n} q^{\frac{1}{2}(k+n)^2} \\ &= \frac{q^{-\frac{1}{2}n^2}}{L(a)} L(a) = q^{-\frac{1}{2}n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

- Zatem ciąg momentów Hamburgera $\{q^{-\frac{1}{2}n^2}\}_{n=0}^{\infty}$ ma kontinuum miar reprezentujących które są równoważne mierze Lebesgue'a na $(0, \infty)$, oraz kontinuum dyskretnych miar reprezentujących λ_a, $a > 0$.

Klasyczny przykład 5

- Nośnik supp λ_a miary reprezentującej λ_a ciągu momentów Hamburgera $\{q^{-\frac{1}{2}n^2}\}_{n=0}^{\infty}$ jest postaci $\{aq^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, gdzie $a > 0$.

Klasyczny przykład 5

- Nośnik supp λ_a miary reprezentującej λ_a ciągu momentów Hamburgera $\{q^{-\frac{1}{2}n^2}\}_{n=0}^{\infty}$ jest postaci $\{aq^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, gdzie $a > 0$.
- Jak uczynić nośniki rozłączne?

Klasyczny przykład 5

- Nośnik supp λ_a miary reprezentującej λ_a ciągu momentów Hamburgera $\{q^{-\frac{1}{2}n^2}\}_{n=0}^{\infty}$ jest postaci $\{aq^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, gdzie $a > 0$.
- Jak uczynić nośniki rozłączne?
- Definiujemy relację równoważności $\sim$ na $(0, \infty)$: $a \sim b$ jeśli istnieje liczba całkowita m tak że $a/b = q^m$.

Klasyczny przykład 5

- Nośnik supp λ_a miary reprezentującej λ_a ciągu momentów Hamburgera $\{q^{-\frac{1}{2}n^2}\}_{n=0}^{\infty}$ jest postaci $\{aq^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, gdzie $a > 0$.
- Jak uczynić nośniki rozłączne?
- Definiujemy relację równoważności $\sim$ na $(0, \infty)$: $a \sim b$ jeśli istnieje liczba całkowita m tak że $a/b = q^m$.
- Klasa równoważności $[a]_\sim$ liczby a jest równa $\{aq^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, zatem jest przeliczalna.

Klasyczny przykład 5

- Nośnik supp λ_a miary reprezentującej λ_a ciągu momentów Hamburgera $\{q^{-\frac{1}{2}n^2}\}_{n=0}^{\infty}$ jest postaci $\{aq^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, gdzie $a > 0$.
- Jak uczynić nośniki rozłączne?
- Definiujemy relację równoważności $\sim$ na $(0, \infty)$: $a \sim b$ jeśli istnieje liczba całkowita m tak że $a/b = q^m$.
- Klasa równoważności $[a]_\sim$ liczby a jest równa $\{aq^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, zatem jest przeliczalna.
- Ponadto istnieje zbiór $\Omega \subseteq (0, \infty)$ taki że $(0, \infty) = \bigsqcup_{a\in\Omega} \operatorname{supp} \lambda_a$.

Klasyczny przykład 5

- Nośnik supp λ_a miary reprezentującej λ_a ciągu momentów Hamburgera $\{q^{-\frac{1}{2}n^2}\}_{n=0}^{\infty}$ jest postaci $\{aq^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, gdzie $a > 0$.
- Jak uczynić nośniki rozłączne?
- Definiujemy relację równoważności $\sim$ na $(0, \infty)$: $a \sim b$ jeśli istnieje liczba całkowita m tak że $a/b = q^m$.
- Klasa równoważności $[a]_\sim$ liczby a jest równa $\{aq^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, zatem jest przeliczalna.
- Ponadto istnieje zbiór $\Omega \subseteq (0, \infty)$ taki że $(0, \infty) = \bigsqcup_{a\in\Omega} \operatorname{supp} \lambda_a$.
- Z powyższego wynika że zbiór Ω jest mocy kontinuum.

Miary N-ekstremalne

Fakt

Każdy niezdeterminowany ciąg momentów Hamburgera posiada rodzinę (mocy $\mathfrak{c}$) specyficznych miar reprezentujących zwanych , N-*ekstremalnymi*, których nośniki są czysto punktowe i tworzą podział prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.

- Miarę μ reprezentującą niezdeterminowany ciąg momentów Hamburegra nazywamy N-ekstremalną gdy wielomiany zespolone zmiennej rzeczywistej x są gęste w przestrzeni Hilberta $L^2(\mu)$.

Miary N-ekstremalne

Fakt

Każdy niezdeterminowany ciąg momentów Hamburgera posiada rodzinę (mocy $\mathfrak{c}$) specyficznych miar reprezentujących zwanych , N-*ekstremalnymi*, których nośniki są czysto punktowe i tworzą podział prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.

- Miarę μ reprezentującą niezdeterminowany ciąg momentów Hamburegra nazywamy N-ekstremalną gdy wielomiany zespolone zmiennej rzeczywistej x są gęste w przestrzeni Hilberta $L^2(\mu)$.

Podejście operatorowe

- Niech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie niezdeterminowanym ciągiem momentów Hamburgera.

Podejście operatorowe

- Niech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie niezdeterminowanym ciągiem momentów Hamburgera.
- Niech $\mathcal{P}$ oznacza pierścień wielomianów zespolonych zmiennej formalnej X.

Podejście operatorowe

- Niech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie niezdeterminowanym ciągiem momentów Hamburgera.
- Niech $\mathcal{P}$ oznacza pierścień wielomianów zespolonych zmiennej formalnej X.
- Ponieważ $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest niezdeterminowany, to $\det[a_{k+l}]_{k,l=0}^{n} > 0$ dla każdego $n \geqslant 0$, a zatem istnieje jedyny iloczyn skalarny $\langle \cdot, \text{-} \rangle$ na $\mathcal{P}$ taki że

$$\langle X^m, X^n \rangle = a_{m+n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

Podejście operatorowe

- Niech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie niezdeterminowanym ciągiem momentów Hamburgera.
- Niech $\mathcal{P}$ oznacza pierścień wielomianów zespolonych zmiennej formalnej X.
- Ponieważ $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest niezdeterminowany, to $\det[a_{k+l}]_{k,l=0}^{n} > 0$ dla każdego $n \geqslant 0$, a zatem istnieje jedyny iloczyn skalarny $\langle \cdot, \text{-} \rangle$ na $\mathcal{P}$ taki że

$$\langle X^m, X^n \rangle = a_{m+n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

- Niech $\mathcal{H}$ będzie uzupełnieniem przestrzeni unitarnej $(\mathcal{P}, \langle \cdot, \text{-} \rangle)$.

Podejście operatorowe

- Ponieważ $\langle X \cdot p, q \rangle = \langle p, X \cdot q \rangle$ dla wszystkich $p, q \in \mathcal{P}$, to istnieje jedyny symetryczny[a] operator liniowy A w $\mathcal{H}$ taki że $\mathcal{D}(A) = \mathcal{P}$ oraz $A(p) = X \cdot p$ dla wszystkich $p \in \mathcal{P}$.

[a] tzn. $\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$ dla $f, g \in \mathcal{D}(A)$.

Podejście operatorowe

- Ponieważ $\langle X \cdot p, q\rangle = \langle p, X \cdot q\rangle$ dla wszystkich $p, q \in \mathcal{P}$, to istnieje jedyny symetryczny[a] operator liniowy A w $\mathcal{H}$ taki że $\mathcal{D}(A) = \mathcal{P}$ oraz $A(p) = X \cdot p$ dla wszystkich $p \in \mathcal{P}$.
- Wtedy $\mathcal{D}(A)$ pokrywa się z liniowym rozpięciem zbioru $\{A^n e \colon n \geqslant 0\}$. Ponadto dzięki (1) mamy

$$a_n = \langle A^n e, e\rangle, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (e := X^0). \tag{2}$$

[a] tzn. $\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$ dla $f, g \in \mathcal{D}(A)$.

Podejście operatorowe

- Ponieważ $\langle X \cdot p, q \rangle = \langle p, X \cdot q \rangle$ dla wszystkich $p, q \in \mathcal{P}$, to istnieje jedyny symetryczny[a] operator liniowy A w $\mathcal{H}$ taki że $\mathcal{D}(A) = \mathcal{P}$ oraz $A(p) = X \cdot p$ dla wszystkich $p \in \mathcal{P}$.
- Wtedy $\mathcal{D}(A)$ pokrywa się z liniowym rozpięciem zbioru $\{A^n e \colon n \geqslant 0\}$. Ponadto dzięki (1) mamy

$$a_n = \langle A^n e, e \rangle, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (e := X^0). \tag{2}$$

- Skoro $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest niezdeterminowany, to operator A ma indeksy defektu $(1, 1)$.

[a] tzn. $\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$ dla $f, g \in \mathcal{D}(A)$.

Podejście operatorowe

- Ponieważ $\langle X \cdot p, q\rangle = \langle p, X \cdot q\rangle$ dla wszystkich $p, q \in \mathcal{P}$, to istnieje jedyny symetryczny[a] operator liniowy A w $\mathcal{H}$ taki że $\mathcal{D}(A) = \mathcal{P}$ oraz $A(p) = X \cdot p$ dla wszystkich $p \in \mathcal{P}$.
- Wtedy $\mathcal{D}(A)$ pokrywa się z liniowym rozpięciem zbioru $\{A^n e \colon n \geqslant 0\}$. Ponadto dzięki (1) mamy

$$a_n = \langle A^n e, e\rangle, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (e := X^0). \tag{2}$$

- Skoro $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest niezdeterminowany, to operator A ma indeksy defektu $(1, 1)$.
- Indeksami defektu operatora symetrycznego A nazywamy wymiary ortogonalne $\ker(A^* \mp \mathrm{i}I)$, gdzie I oznacza operator identycznościowy na $\mathcal{H}$.

[a] tzn. $\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$ dla $f, g \in \mathcal{D}(A)$.

Opis miar reprezentujących

- Odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna:

$$\mu_B(\sigma) = \langle E_B(\sigma)e, e\rangle, \quad \sigma \text{ - Borel subset of } \mathbb{R},$$

gdzie:
μ_B miara reprezentująca ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \longleftrightarrow E_B$ miara spektralna minimalnego rozszerzenia samosprzężonego B operatora A.

- Odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna:

$$\mu_B(\sigma) = \langle E_B(\sigma)e, e\rangle, \quad \sigma \text{ - Borel subset of } \mathbb{R},$$

  gdzie:
  μ_B miara reprezentująca ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \longleftrightarrow E_B$ miara spektralna minimalnego rozszerzenia samosprzężonego B operatora A.
- Relacja $\mathcal{H}$-równoważności w klasie miar spektralnych rozszerzeń samosprzężonych operatora A.

Opis miar reprezentujących

- Odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna:

$$\mu_B(\sigma) = \langle E_B(\sigma)e, e\rangle, \quad \sigma \text{ - Borel subset of } \mathbb{R},$$

  gdzie:
  μ_B miara reprezentująca ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \longleftrightarrow E_B$ miara spektralna minimalnego rozszerzenia samosprzężonego B operatora A.

- Relacja $\mathcal{H}$-równoważności w klasie miar spektralnych rozszerzeń samosprzężonych operatora A.
- nośnik μ = widmo operatora B

Opis miar reprezentujących

- Odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna:

$$\mu_B(\sigma) = \langle E_B(\sigma)e, e\rangle, \quad \sigma \text{ - Borel subset of } \mathbb{R},$$

  gdzie:
  μ_B miara reprezentująca ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \longleftrightarrow E_B$ miara spektralna minimalnego rozszerzenia samosprzężonego B operatora A.
- Relacja $\mathcal{H}$-równoważności w klasie miar spektralnych rozszerzeń samosprzężonych operatora A.
- nośnik μ = widmo operatora B
- rozszerzenia von Neumanna $=$ rozszerzenia samosprzężone operatora A w przestrzeni $\mathcal{H}$

Opis miar reprezentujących

- Odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna:

$$\mu_B(\sigma) = \langle E_B(\sigma)e, e\rangle, \quad \sigma \text{ - Borel subset of } \mathbb{R},$$

  gdzie:
  μ_B miara reprezentująca ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \longleftrightarrow E_B$ miara spektralna minimalnego rozszerzenia samosprzężonego B operatora A.
- Relacja $\mathcal{H}$-równoważności w klasie miar spektralnych rozszerzeń samosprzężonych operatora A.
- nośnik μ = widmo operatora B
- rozszerzenia von Neumanna $=$ rozszerzenia samosprzężone operatora A w przestrzeni $\mathcal{H}$
- bijekcja pomiędzy miarami N-ekstremalnymi a rozszerzeniami von Neumanna

Opis miar N-ekstremalnych

- Istnieje bijekcja $t \mapsto \mu_t$ pomiędzy zbiorem $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a zbiorem wszystkich miar N-ekstremalnych ciągu $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ taka że

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\mu_t(x)}{x} = t, \quad t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Opis miar N-ekstremalnych

- Istnieje bijekcja $t \mapsto \mu_t$ pomiędzy zbiorem $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a zbiorem wszystkich miar N-ekstremalnych ciągu $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ taka że

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\mu_t(x)}{x} = t, \quad t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

- $t = \langle B_t^{-1} e, e \rangle$, $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, gdzie $\{B_t\}_{t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}}$ są rozszerzeniami von Neumanna operatora A,

Opis miar N-ekstremalnych

- Istnieje bijekcja $t \mapsto \mu_t$ pomiędzy zbiorem $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a zbiorem wszystkich miar N-ekstremalnych ciągu $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ taka że

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\mu_t(x)}{x} = t, \quad t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

- $t = \langle B_t^{-1} e, e \rangle$, $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, gdzie $\{B_t\}_{t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}}$ są rozszerzeniami von Neumanna operatora A,
- widmo operatora B_t nie zawiera 0 gdy $t \in \mathbb{R}$, natomiast 0 jest wartością własną B_∞

Ciąg momentów Stieltjesa

- Ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazywamy jest ciągiem *momentów Stieltjesa* jeśli istnieje dodatnia miara borelowska μ na $[0, \infty)$ taka że

$$a_n = \int_0^{\infty} x^n \, \mathrm{d}\mu(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ciąg momentów Stieltjesa

- Ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazywamy jest ciągiem *momentów Stieltjesa* jeśli istnieje dodatnia miara borelowska μ na $[0, \infty)$ taka że

$$a_n = \int_0^{\infty} x^n \, \mathrm{d}\mu(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Miara μ nazywana jest *miarą reprezentującą* ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Ciąg momentów Stieltjesa

- Ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazywamy jest ciągiem *momentów Stieltjesa* jeśli istnieje dodatnia miara borelowska μ na $[0,\infty)$ taka że

$$a_n = \int_0^{\infty} x^n \,\mathrm{d}\mu(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Miara μ nazywana jest *miarą reprezentującą* ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.
- Mówimy że ciąg momentów Stieltjesa jest *niezdeterminowany* jeśli ma więcej niż jedną miarę reprezentującą.

Ciąg momentów Stieltjesa

- Ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazywamy jest ciągiem *momentów Stieltjesa* jeśli istnieje dodatnia miara borelowska μ na $[0, \infty)$ taka że

$$a_n = \int_0^{\infty} x^n \, \mathrm{d}\mu(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Miara μ nazywana jest *miarą reprezentującą* ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.
- Mówimy że ciąg momentów Stieltjesa jest *niezdeterminowany* jeśli ma więcej niż jedną miarę reprezentującą.
- W przeciwnym wypadku, mówimy że jest *zdeterminowany*.

Ciąg momentów Stieltjesa

- Ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazywamy jest ciągiem *momentów Stieltjesa* jeśli istnieje dodatnia miara borelowska μ na $[0, \infty)$ taka że

$$a_n = \int_0^{\infty} x^n \, \mathrm{d}\mu(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Miara μ nazywana jest *miarą reprezentującą* ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.
- Mówimy że ciąg momentów Stieltjesa jest *niezdeterminowany* jeśli ma więcej niż jedną miarę reprezentującą.
- W przeciwnym wypadku, mówimy że jest *zdeterminowany*.
- determinizm w sensie Stieltjesa

Niezdeterminowany ciąg momentów Stieltjesa

- Niech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie niezdeterminowanym ciągiem momentów Stieltjesa.

Niezdeterminowany ciąg momentów Stieltjesa

- Niech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie niezdeterminowanym ciągiem momentów Stieltjesa.
- Wtedy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest również niezdeterminowanym ciągiem momentów Hamburgera.

Niezdeterminowany ciąg momentów Stieltjesa

- Niech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie niezdeterminowanym ciągiem momentów Stieltjesa.
- Wtedy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest również niezdeterminowanym ciągiem momentów Hamburgera.
- Operator A jest wtedy nieujemny, tzn.: $\langle Af, f\rangle \geqslant 0$ dla wszystkich $f \in \mathcal{D}(A)$.

Niezdeterminowany ciąg momentów Stieltjesa

- Niech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie niezdeterminowanym ciągiem momentów Stieltjesa.
- Wtedy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest również niezdeterminowanym ciągiem momentów Hamburgera.
- Operator A jest wtedy nieujemny, tzn.: $\langle Af, f\rangle \geqslant 0$ dla wszystkich $f \in \mathcal{D}(A)$.
- istnieją dwa ekstremalne rozszerzenia von Neumanna operatora A zwane rozszerzeniami Friedrichs'a B_F i Kreina B_K które są różne, oba są nieujemne oraz każde inne nieujemne rozszerzenie von Neumanna B operatora A mieści się pomiędzy nimi, tzn.: $B_F \leqslant B \leqslant B_K$.

Opis stieltjesowskich miar N-ekstremalnych

- $B_{\mathrm{K}} = B_{\infty}$ and $B_{\mathrm{F}} = B_{t_0}$, gdzie $t_0 = \langle B_{\mathrm{F}}^{-1} e, e\rangle \in (0, \infty)$,

Opis stieltjesowskich miar N-ekstremalnych

- $B_{\mathrm{K}} = B_\infty$ and $B_{\mathrm{F}} = B_{t_0}$, gdzie $t_0 = \langle B_{\mathrm{F}}^{-1} e, e\rangle \in (0, \infty)$,
- $$\forall t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\colon \quad \operatorname{supp} \mu_t \subseteq [0, \infty) \iff t \in [t_0, \infty) \cup \{\infty\}.$$

Opis stieltjesowskich miar N-ekstremalnych

- $B_{\mathrm{K}} = B_\infty$ and $B_{\mathrm{F}} = B_{t_0}$, gdzie $t_0 = \langle B_{\mathrm{F}}^{-1} e, e \rangle \in (0, \infty)$,
- $$\forall t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\colon \quad \operatorname{supp} \mu_t \subseteq [0, \infty) \iff t \in [t_0, \infty) \cup \{\infty\}.$$
- Innymi słowy $\{\mu_t\}_{t \in [t_0, \infty) \cup \{\infty\}}$ są jedynymi miarami N-ekstremalnymi ciągu $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ będącymi jednocześnie miarami reprezentującymi w sensie Stieltjesa.

New example

An [a] example of an indeterminate Hamburger moment sequence which has a family of discrete representing measures such that

1. the support of each of them is in arithmetic progression;

In fact, we are able to construct a large class of examples coming from the same source, however we cannot exclude the appearance of N-extremal measures within them. This is left as an open problem.

[a] Cichoń, JS and Szafraniec

New example

An [a] example of an indeterminate Hamburger moment sequence which has a family of discrete representing measures such that

1. the support of each of them is in arithmetic progression;
2. the supports of all the measures together partition $\mathbb{R}$;

In fact, we are able to construct a large class of examples coming from the same source, however we cannot exclude the appearance of N-extremal measures within them. This is left as an open problem.

[a] Cichoń, JS and Szafraniec

An [a] example of an indeterminate Hamburger moment sequence which has a family of discrete representing measures such that

1. the support of each of them is in arithmetic progression;
2. the supports of all the measures together partition $\mathbb{R}$;
3. none of them is N-extremal;

In fact, we are able to construct a large class of examples coming from the same source, however we cannot exclude the appearance of N-extremal measures within them. This is left as an open problem.

[a] Cichoń, JS and Szafraniec

New example

An [a] example of an indeterminate Hamburger moment sequence which has a family of discrete representing measures such that

1. the support of each of them is in arithmetic progression;
2. the supports of all the measures together partition $\mathbb{R}$;
3. none of them is N-extremal;
4. all of them are of infinite order.

In fact, we are able to construct a large class of examples coming from the same source, however we cannot exclude the appearance of N-extremal measures within them. This is left as an open problem.

[a] Cichoń, JS and Szafraniec

New example

An [a] example of an indeterminate Hamburger moment sequence which has a family of discrete representing measures such that

1. the support of each of them is in arithmetic progression;
2. the supports of all the measures together partition $\mathbb{R}$;
3. none of them is N-extremal;
4. all of them are of infinite order.

In fact, we are able to construct a large class of examples coming from the same source, however we cannot exclude the appearance of N-extremal measures within them. This is left as an open problem.

[a] Cichoń, JS and Szafraniec

New example

An [a] example of an indeterminate Hamburger moment sequence which has a family of discrete representing measures such that

1. the support of each of them is in arithmetic progression;
2. the supports of all the measures together partition $\mathbb{R}$;
3. none of them is N-extremal;
4. all of them are of infinite order.

In fact, we are able to construct a large class of examples coming from the same source, however we cannot exclude the appearance of N-extremal measures within them. This is left as an open problem.

[a] Cichoń, JS and Szafraniec

Construction

1. Fix a nonzero *test function* ω on $\mathbb{R}$, i.e. a complex function of class $\mathcal{C}^\infty$ whose closed support $\operatorname{supp}\omega$ is compact.

Construction

1. Fix a nonzero *test function* ω on $\mathbb{R}$, i.e. a complex function of class $\mathcal{C}^\infty$ whose closed support $\operatorname{supp}\omega$ is compact.
2. Define the sequence $\{a_n^\omega\}_{n=0}^\infty$ by

$$a_n^\omega = (-\mathrm{i})^n \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}^n\omega}{\mathrm{d}x^n}(x)\,\overline{\omega(x)}\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Construction

1. Fix a nonzero *test function* ω on $\mathbb{R}$, i.e. a complex function of class $\mathcal{C}^\infty$ whose closed support $\operatorname{supp}\omega$ is compact.
2. Define the sequence $\{a_n^\omega\}_{n=0}^\infty$ by

$$a_n^\omega = (-\mathrm{i})^n \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}^n\omega}{\mathrm{d}x^n}(x)\,\overline{\omega(x)}\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

3. Applying the Plancherel theorem, we see that

$$a_n^\omega = \int_{\mathbb{R}} x^n\,|\widehat{\omega}(x)|^2\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Construction

1. Fix a nonzero *test function* ω on $\mathbb{R}$, i.e. a complex function of class $\mathcal{C}^\infty$ whose closed support $\operatorname{supp}\omega$ is compact.
2. Define the sequence $\{a_n^\omega\}_{n=0}^\infty$ by

$$a_n^\omega = (-\mathrm{i})^n \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}^n\omega}{\mathrm{d}x^n}(x)\,\overline{\omega(x)}\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

3. Applying the Plancherel theorem, we see that

$$a_n^\omega = \int_{\mathbb{R}} x^n\,|\widehat{\omega}(x)|^2\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

4. where $\widehat{\omega}$ stands for the Fourier transform of ω, i.e.

$$\widehat{\omega}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \omega(x) e^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Construction

1. Hence $\{a_n^{\omega}\}_{n=0}^{\infty}$ is a Hamburger moment sequence having a representing measure $|\widehat{\omega}(x)|^2\,\mathrm{d}x$ which, by the Paley-Wiener theorem, is equivalent to the Lebesgue measure on the real line $\mathbb{R}$.

Construction

1. Hence $\{a_n^\omega\}_{n=0}^\infty$ is a Hamburger moment sequence having a representing measure $|\widehat{\omega}(x)|^2 \, \mathrm{d}x$ which, by the Paley-Wiener theorem, is equivalent to the Lebesgue measure on the real line $\mathbb{R}$.
2. Let us consider a family of Borel measure on $\mathbb{R}$:

$$\mu_{t|\omega}^{c,d} := \frac{2\pi}{d-c} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\omega}(\lambda_{t,k}^{c,d})|^2 \, \delta_{\lambda_{t,k}^{c,d}}, \quad \lambda_{t,k}^{c,d} = \frac{2k\pi - t}{d-c},$$

Construction

1. Hence $\{a_n^\omega\}_{n=0}^\infty$ is a Hamburger moment sequence having a representing measure $|\widehat{\omega}(x)|^2\, \mathrm{d}x$ which, by the Paley-Wiener theorem, is equivalent to the Lebesgue measure on the real line $\mathbb{R}$.
2. Let us consider a family of Borel measure on $\mathbb{R}$:

$$\mu_{t|\omega}^{c,d} := \frac{2\pi}{d-c} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\omega}(\lambda_{t,k}^{c,d})|^2\, \delta_{\lambda_{t,k}^{c,d}}, \quad \lambda_{t,k}^{c,d} = \frac{2k\pi - t}{d-c},$$

3. where $t \in \mathbb{R}$, and $c, d \in \mathbb{R}$ are such that $c < d$ and $\operatorname{supp}\omega \subseteq [c,d] := \{x \in \mathbb{R} : c \leqslant x \leqslant d\}$.

Construction

1. Hence $\{a_n^\omega\}_{n=0}^\infty$ is a Hamburger moment sequence having a representing measure $|\widehat{\omega}(x)|^2\,\mathrm{d}x$ which, by the Paley-Wiener theorem, is equivalent to the Lebesgue measure on the real line $\mathbb{R}$.
2. Let us consider a family of Borel measure on $\mathbb{R}$:
$$\mu_{t|\omega}^{c,d} := \frac{2\pi}{d-c}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\omega}(\lambda_{t,k}^{c,d})|^2\,\delta_{\lambda_{t,k}^{c,d}}, \quad \lambda_{t,k}^{c,d} = \frac{2k\pi - t}{d-c},$$
3. where $t\in\mathbb{R}$, and $c,d\in\mathbb{R}$ are such that $c<d$ and $\operatorname{supp}\omega \subseteq [c,d] := \{x\in\mathbb{R}\colon c\leqslant x\leqslant d\}$.
4. Considering selfadjoint extensions of a symmetric first order differential operator "$-i\,\frac{d}{dx}$" (or employing the Whittaker-Shannon-Kotelnikov technique), we show that the measures $\mu_{t|\omega}^{c,d}$ are discrete representing measures of the Hamburger moment sequence $\{a_n^\omega\}_{n=0}^\infty$.

Supports

1. The support of the measure $\mu^{c,d}_{t|\omega}$ is given by

$$\operatorname{supp} \mu^{c,d}_{t|\omega} = \{\lambda^{c,d}_{t,k} : k \in \mathbb{Z},\ \widehat{\omega}(\lambda^{c,d}_{t,k}) \neq 0\} \subset Y^{c,d}_t, \quad t \in [0, 2\pi),$$

1. The support of the measure $\mu^{c,d}_{t|\omega}$ is given by

$$\operatorname{supp} \mu^{c,d}_{t|\omega} = \{\lambda^{c,d}_{t,k} \colon k \in \mathbb{Z},\ \widehat{\omega}(\lambda^{c,d}_{t,k}) \neq 0\} \subset Y^{c,d}_t, \quad t \in [0, 2\pi),$$

2. where $Y^{c,d}_t := \{\lambda^{c,d}_{t,k} \colon k \in \mathbb{Z}\}$.

Supports

1. The support of the measure $\mu^{c,d}_{t|\omega}$ is given by

$$\operatorname{supp} \mu^{c,d}_{t|\omega} = \{\lambda^{c,d}_{t,k} : k \in \mathbb{Z}, \widehat{\omega}(\lambda^{c,d}_{t,k}) \neq 0\} \subset Y^{c,d}_t, \quad t \in [0, 2\pi),$$

2. where $Y^{c,d}_t := \{\lambda^{c,d}_{t,k} : k \in \mathbb{Z}\}$.
3. The family $\{Y^{c,d}_t\}_{t\in[0,2\pi)}$ is a partition of $\mathbb{R}$.

Supports

1. The support of the measure $\mu_{t|\omega}^{c,d}$ is given by

$$\operatorname{supp} \mu_{t|\omega}^{c,d} = \{\lambda_{t,k}^{c,d} \colon k \in \mathbb{Z},\, \widehat{\omega}(\lambda_{t,k}^{c,d}) \neq 0\} \subset Y_t^{c,d}, \quad t \in [0, 2\pi),$$

2. where $Y_t^{c,d} := \{\lambda_{t,k}^{c,d} \colon k \in \mathbb{Z}\}$.
3. The family $\{Y_t^{c,d}\}_{t\in[0,2\pi)}$ is a partition of $\mathbb{R}$.
4. The set $J_{c,d} := \{t \in [0, 2\pi) \colon Y_t^{c,d} \cap \widehat{\omega}^{-1}(\{0\}) \neq \varnothing\}$ is at most countable. As a consequence, we have

$$\operatorname{supp} \mu_{t|\omega}^{c,d} = Y_t^{c,d} \text{ for } t \in [0, 2\pi) \setminus J_{c,d},$$
$$\operatorname{card}(\operatorname{supp} \mu_{t|\omega}^{c,d}) = \aleph_0 \text{ for } t \in J_{c,d},$$

where $\operatorname{card}(B)$ stands for the cardinality of a set B.

Supports

1. Hence the set $\bigcup_{t\in[0,2\pi)} \operatorname{supp} \mu^{c,d}_{t|\omega}$ fills up the whole real line except for a finite or countable set.

1. Hence the set $\bigcup_{t\in[0,2\pi)} \operatorname{supp} \mu_{t|\omega}^{c,d}$ fills up the whole real line except for a finite or countable set.
2. The question arises whether this exceptional set may be empty.

Supports

1. Hence the set $\bigcup_{t\in[0,2\pi)} \operatorname{supp} \mu^{c,d}_{t|\omega}$ fills up the whole real line except for a finite or countable set.
2. The question arises whether this exceptional set may be empty.
3. This amounts to asking whether there exists a test function on $\mathbb{R}$ whose Fourier transform has no real zeros (this is closely related to the problem of linear density of translates of a given function in L^1).

Supports

1. Hence the set $\bigcup_{t\in[0,2\pi)} \operatorname{supp} \mu^{c,d}_{t|\omega}$ fills up the whole real line except for a finite or countable set.
2. The question arises whether this exceptional set may be empty.
3. This amounts to asking whether there exists a test function on $\mathbb{R}$ whose Fourier transform has no real zeros (this is closely related to the problem of linear density of translates of a given function in L^1).
4. The answer is in the affirmative.

Supports

1. Hence the set $\bigcup_{t\in[0,2\pi)} \operatorname{supp} \mu^{c,d}_{t|\omega}$ fills up the whole real line except for a finite or countable set.
2. The question arises whether this exceptional set may be empty.
3. This amounts to asking whether there exists a test function on $\mathbb{R}$ whose Fourier transform has no real zeros (this is closely related to the problem of linear density of translates of a given function in L^1).
4. The answer is in the affirmative.
5. If the test function ω has the desired property, then

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{t\in[0,2\pi)} \operatorname{supp} \mu^{c,d}_{t|\omega}.$$

Rubel's [1955] extension of the Carlson theorem [1914]

If f is an entire function on $\mathbb{C}$ such that $\sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|\mathrm{e}^{-a|z|} < \infty$ for some $a > 0$ and $\sup_{y\in\mathbb{R}} |f(\mathrm{i}y)|\mathrm{e}^{-b|y|} < \infty$ for some $0 < b < \pi$, then the following three conditions are equivalent:

- (i) $f(z) = 0$ for all $z \in \mathbb{C}$,
- (ii) $f(k) = 0$ for all $k = 1, 2, \ldots$,
- (iii) $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{card}\{k \in \{1,\ldots,n\} : f(k) = 0\}}{n} = 1.$

Supports

Rubel's [1955] extension of the Carlson theorem [1914]

If f is an entire function on $\mathbb{C}$ such that $\sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|\mathrm{e}^{-a|z|} < \infty$ for some $a > 0$ and $\sup_{y\in\mathbb{R}} |f(\mathrm{i}y)|\mathrm{e}^{-b|y|} < \infty$ for some $0 < b < \pi$, then the following three conditions are equivalent:

(i) $f(z) = 0$ for all $z \in \mathbb{C}$,

(ii) $f(k) = 0$ for all $k = 1, 2, \ldots$,

(iii) $\displaystyle \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{k \in \{1,\ldots,n\} : f(k) = 0\}}{n} = 1.$

Positive density of $\operatorname{supp} \mu^{c,d}_{t|\omega}$

If $d - c > \operatorname{diam}(\operatorname{supp}\omega)$ and $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, then

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\operatorname{card}\left(\operatorname{supp}\mu^{c,d}_{t|\omega} \cap \{\lambda^{c,d}_{t,k} : k \in \varepsilon\{1,\ldots,n\}\}\right)}{n} > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- The representing measure $\mu^{c,d}_{t|\omega}$ of the Hamburger moment sequence $\{a_n^{\omega}\}_{n=0}^{\infty}$ is of the form:

$$\mu^{c,d}_{t|\omega}(\sigma) = \langle E_t^{c,d}(\sigma)\omega, \omega\rangle, \quad \sigma \text{ -Borel subset of } \mathbb{R},$$

- The representing measure $\mu_{t|\omega}^{c,d}$ of the Hamburger moment sequence $\{a_n^\omega\}_{n=0}^\infty$ is of the form:

$$\mu_{t|\omega}^{c,d}(\sigma) = \langle E_t^{c,d}(\sigma)\omega, \omega\rangle, \quad \sigma \text{ -Borel subset of } \mathbb{R},$$

- where $E_t^{c,d}$ is the spectral measure of the selfadjoint operator $N_t^{c,d}$ acting in the complex Hilbert space $L^2[c, d]$;

Differential operator "$-i\frac{d}{dx}$"

- The representing measure $\mu_{t|\omega}^{c,d}$ of the Hamburger moment sequence $\{a_n^\omega\}_{n=0}^\infty$ is of the form:

$$\mu_{t|\omega}^{c,d}(\sigma) = \langle E_t^{c,d}(\sigma)\omega, \omega\rangle, \quad \sigma \text{ -Borel subset of } \mathbb{R},$$

- where $E_t^{c,d}$ is the spectral measure of the selfadjoint operator $N_t^{c,d}$ acting in the complex Hilbert space $L^2[c,d]$;
- the operator $N_t^{c,d}$ is given by

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(N_t^{c,d}) = \{f \in L^2[c,d] \colon f \text{ is absolutely continuous in } [c,d],\\ f' \in L^2[c,d] \text{ and } f(c) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} f(d)\},\end{aligned}$$

$$N_t^{c,d} f = -\mathrm{i} f', \quad f \in \mathcal{D}(N_t^{c,d}),$$

Differential operator "$-i\frac{d}{dx}$"

- The representing measure $\mu^{c,d}_{t|\omega}$ of the Hamburger moment sequence $\{a_n^\omega\}_{n=0}^\infty$ is of the form:

$$\mu^{c,d}_{t|\omega}(\sigma) = \langle E^{c,d}_t(\sigma)\omega, \omega\rangle, \quad \sigma \text{ -Borel subset of } \mathbb{R},$$

- where $E^{c,d}_t$ is the spectral measure of the selfadjoint operator $N^{c,d}_t$ acting in the complex Hilbert space $L^2[c,d]$;
- the operator $N^{c,d}_t$ is given by

$$\mathcal{D}(N^{c,d}_t) = \{f \in L^2[c,d] \colon f \text{ is absolutely continuous in } [c,d], \\ f' \in L^2[c,d] \text{ and } f(c) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} f(d)\},$$

$$N^{c,d}_t f = -\mathrm{i}f', \quad f \in \mathcal{D}(N^{c,d}_t),$$

- $\mathcal{D}(N^{c,d}_t)$ is the domain of $N^{c,d}_t$, and f' is the derivative of f.

Order of representing measures

- Given a positive Borel measure ρ on $\mathbb{R}$ with all moments finite, we define the order $\operatorname{ord}(\rho)$ of ρ as

$$\operatorname{ord}(\rho) = \dim L^2(\rho) \ominus \mathcal{P}^2(\rho),$$

Order of representing measures

- Given a positive Borel measure ρ on $\mathbb{R}$ with all moments finite, we define the order $\operatorname{ord}(\rho)$ of ρ as

$$\operatorname{ord}(\rho) = \dim L^2(\rho) \ominus \mathcal{P}^2(\rho),$$

- where $\mathcal{P}^2(\rho)$ is the closure in $L^2(\rho)$ of the set $\mathbb{C}[X]$ of all complex polynomials in one real variable and “dim” stands for the orthogonal dimension.

Order of representing measures

- Given a positive Borel measure ρ on $\mathbb{R}$ with all moments finite, we define the order $\operatorname{ord}(\rho)$ of ρ as

$$\operatorname{ord}(\rho) = \dim L^2(\rho) \ominus \mathcal{P}^2(\rho),$$

- where $\mathcal{P}^2(\rho)$ is the closure in $L^2(\rho)$ of the set $\mathbb{C}[X]$ of all complex polynomials in one real variable and “dim” stands for the orthogonal dimension.
- According to a M. Riesz theorem [1923], a representing measure of an indeterminate Hamburger moment sequence is N-extremal if and only if its order is equal to 0.

- The following holds true:

Theorem

If $[\alpha, \beta] \subsetneq [c, d]$, $t \in [0, 2\pi)$, and the set $\{k \in \mathbb{Z} \colon \widehat{\omega}(\lambda_{t,k}^{c,d}) = 0\}$ is finite, then $\mathrm{ord}(\mu_{t|\omega}^{c,d}) = \aleph_0$.

Order of representing measures

- The following holds true:

Theorem

If $[\alpha,\beta] \subsetneqq [c,d]$, $t \in [0,2\pi)$, and the set $\{k \in \mathbb{Z} \colon \widehat{\omega}(\lambda_{t,k}^{c,d}) = 0\}$ is finite, then $\operatorname{ord}(\mu_{t|\omega}^{c,d}) = \aleph_0$.

- By analyticity of $\widehat{\omega}$, we have:

Corollary

If $[\alpha,\beta] \subsetneqq [c,d]$, then for all real t except at most a countable number, $\operatorname{ord}(\mu_{t|\omega}^{c,d}) = \aleph_0$.

Order of representing measures

- In some circumstances, the infinite order of $\mu_{t|\omega}^{c,d}$ can also be assured for $[c,d] = [\alpha,\beta]$.

Theorem

Assume that there exists an open nonempty interval $\varDelta \subset [\alpha,\beta]$ and a nonzero polynomial $p \in \mathbb{C}[X]$ such that $\big[p\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big)\omega\big](x) = 0$ for all $x \in \varDelta$. Then $\operatorname{ord}(\mu_{t|\omega}^{\alpha,\beta}) = \aleph_0$ for all $t \in [0, 2\pi)$.

Order of representing measures

- In some circumstances, the infinite order of $\mu_{t|\omega}^{c,d}$ can also be assured for $[c,d] = [\alpha,\beta]$.

Theorem

Assume that there exists an open nonempty interval $\varDelta \subset [\alpha,\beta]$ and a nonzero polynomial $p \in \mathbb{C}[X]$ such that $\big[p\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big)\omega\big](x) = 0$ for all $x \in \varDelta$. Then $\operatorname{ord}(\mu_{t|\omega}^{\alpha,\beta}) = \aleph_0$ for all $t \in [0, 2\pi)$.

- If ω_0 is any test function taking value 1 in the interval $\varDelta$, then the test function ω given by the formula (3) below satisfies the assumptions of Theorem:

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^{m} p_j(x)\mathrm{e}^{a_j x}\omega_0(x), \quad x \in \varDelta; \tag{3}$$

Order of representing measures

- In some circumstances, the infinite order of $\mu^{c,d}_{t|\omega}$ can also be assured for $[c,d] = [\alpha,\beta]$.

Theorem

Assume that there exists an open nonempty interval $\varDelta \subset [\alpha,\beta]$ and a nonzero polynomial $p \in \mathbb{C}[X]$ such that $\big[p\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big)\omega\big](x) = 0$ for all $x \in \varDelta$. Then $\operatorname{ord}(\mu^{\alpha,\beta}_{t|\omega}) = \aleph_0$ for all $t \in [0, 2\pi)$.

- If ω_0 is any test function taking value 1 in the interval $\varDelta$, then the test function ω given by the formula (3) below satisfies the assumptions of Theorem:

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^{m} p_j(x)\mathrm{e}^{a_j x}\omega_0(x), \quad x \in \varDelta; \tag{3}$$

- here $p_j \in \mathbb{C}[X]$ and $a_j \in \mathbb{C}$.