Topologia obliczeniowa

3 Minikonferencja Środowiskowych Studiów Doktoranckich
z Nauk Matematycznych

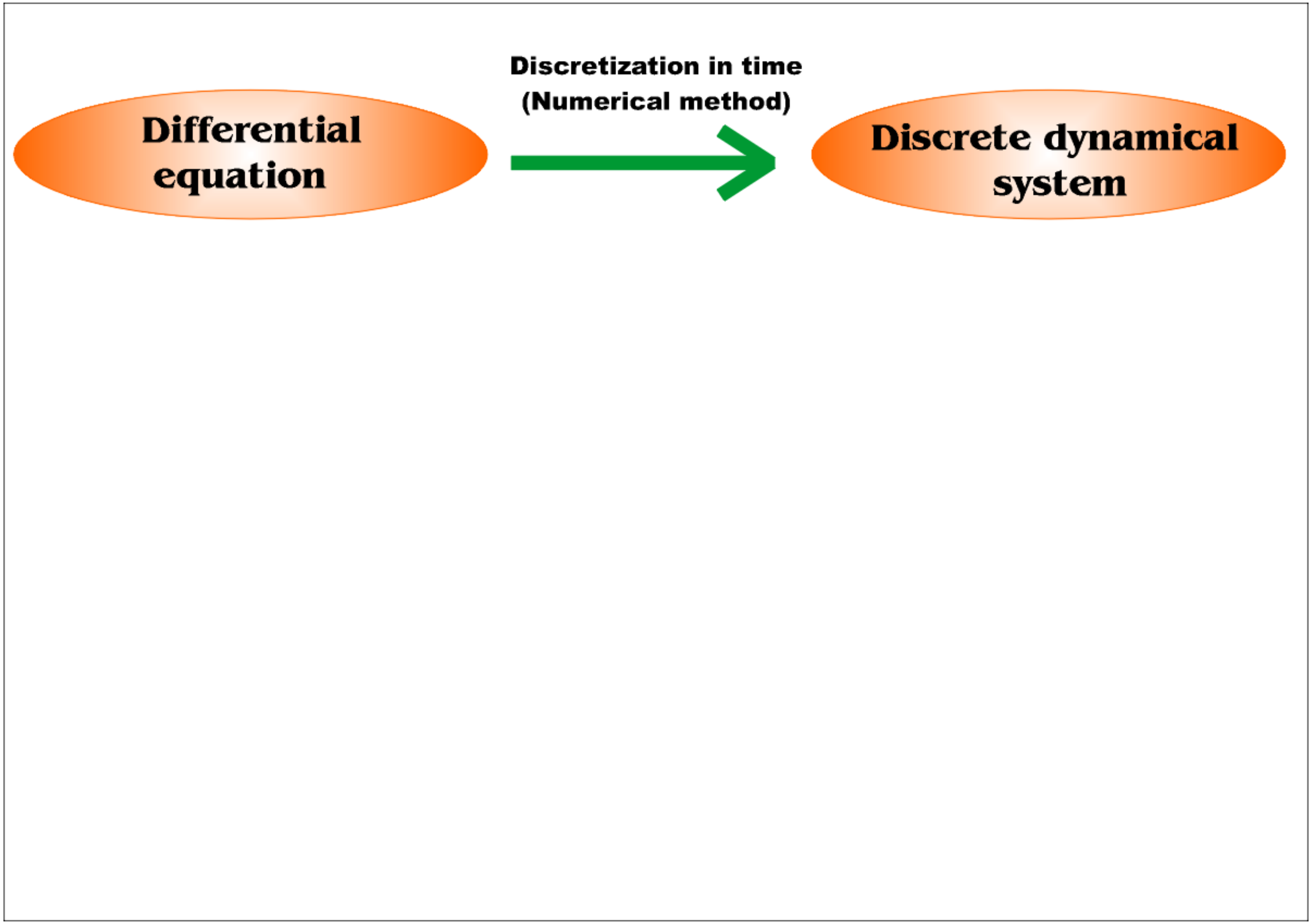
Kraków, 14. października 2011

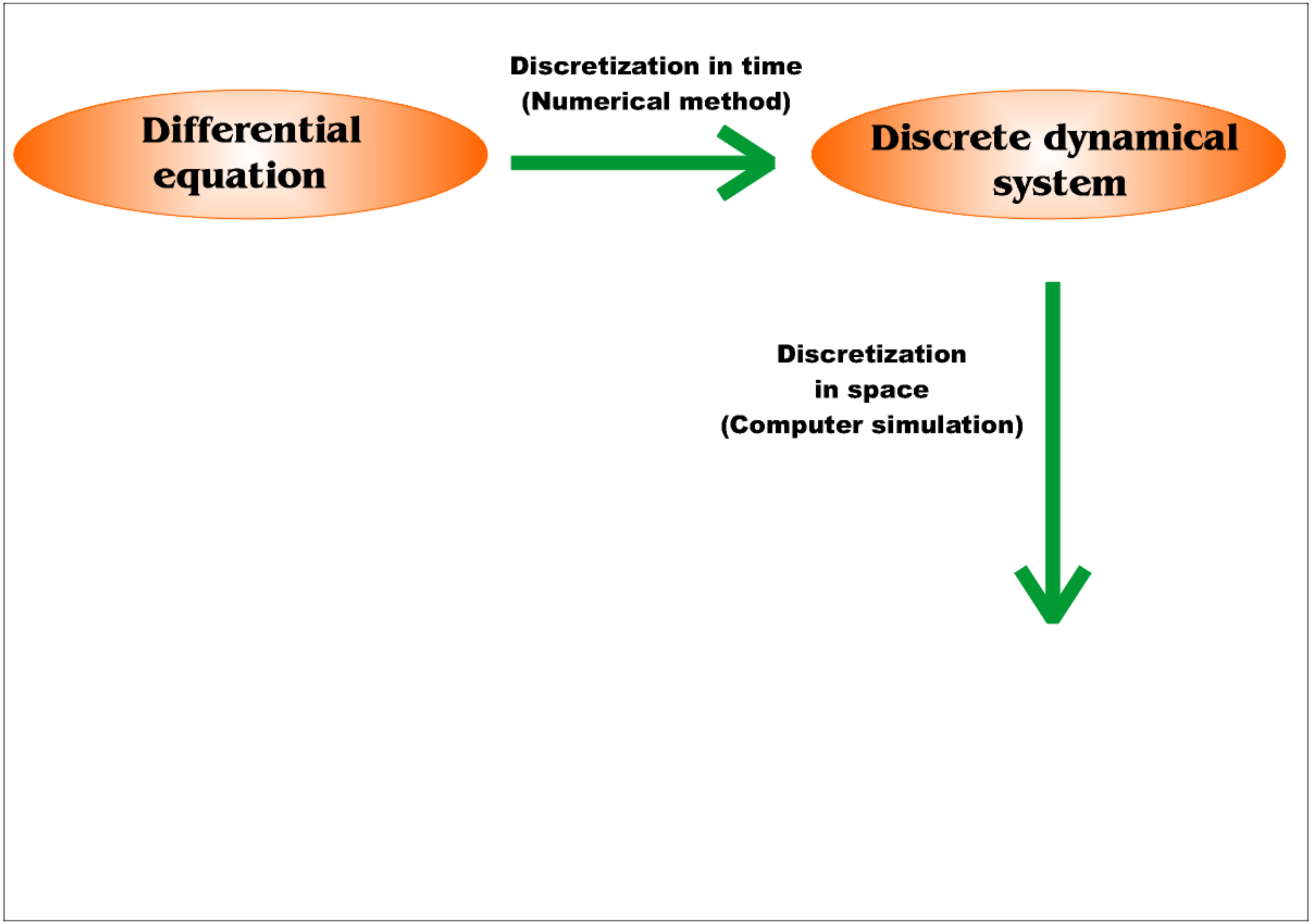
Marian Mrozek

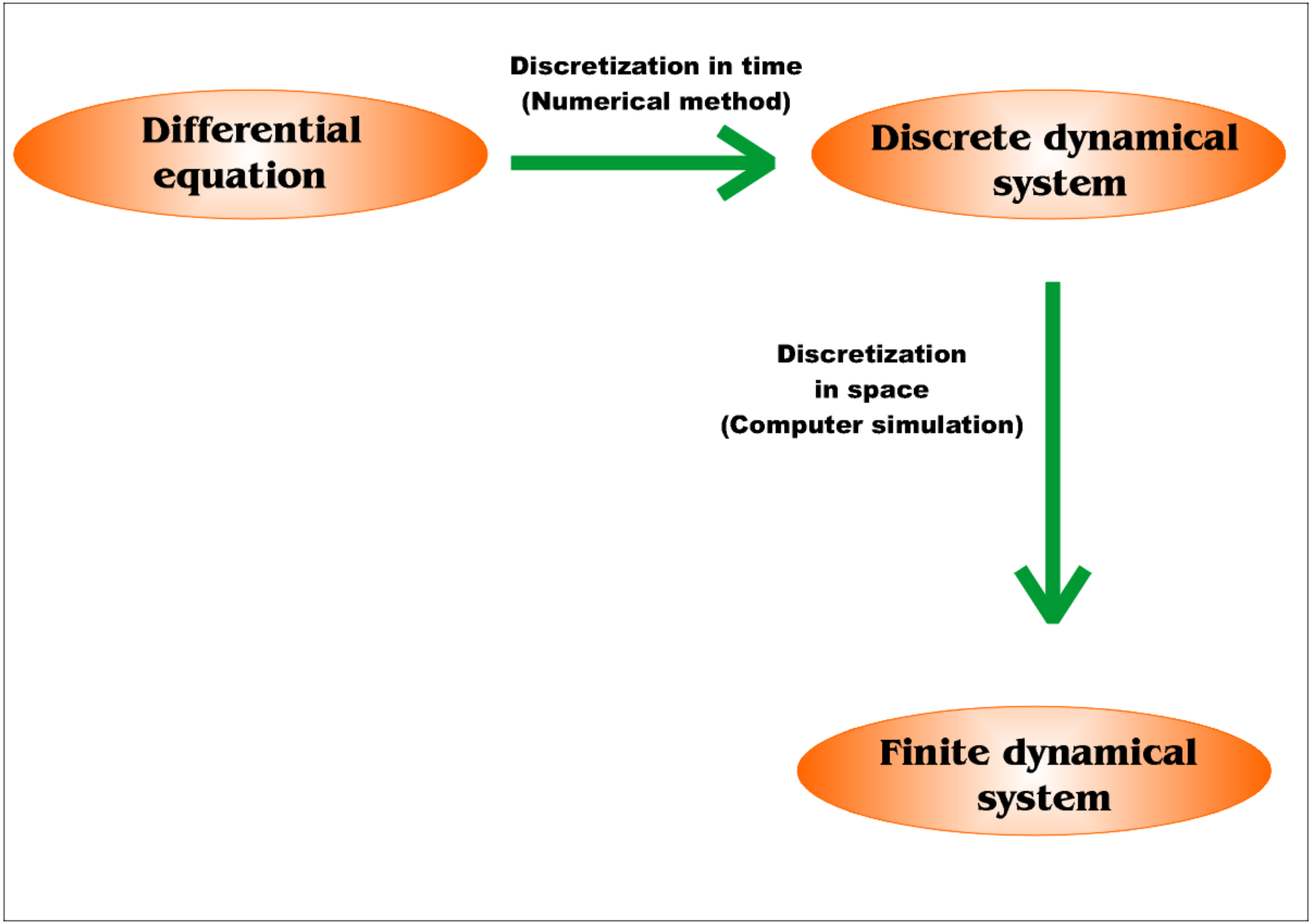
Uniwersytet Jagielloński

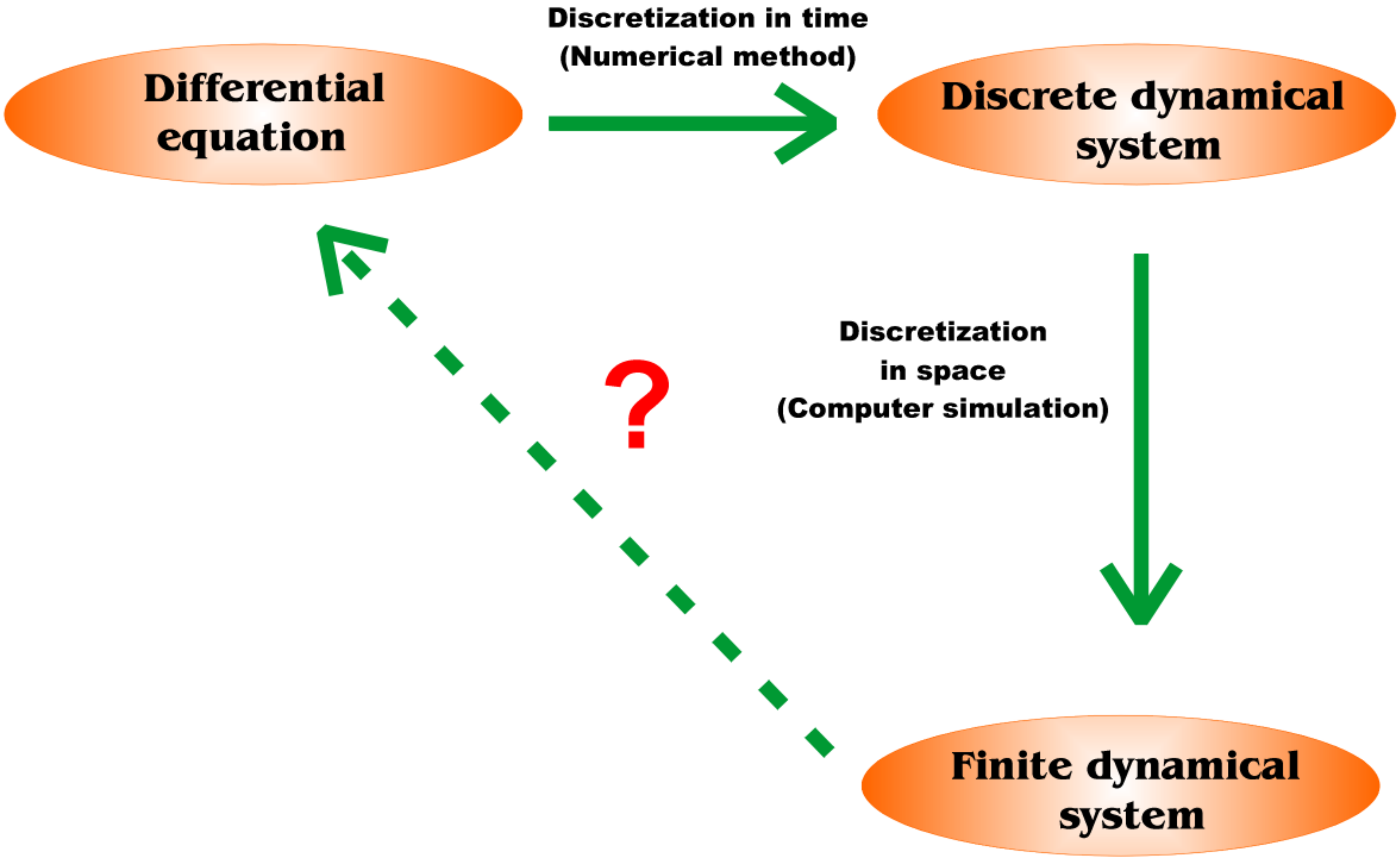
Differential equation


Differential equation
Discretization in time
(Numerical method)


Discretization in time
(Numerical method)
Differential equation
Discrete dynamical system


Differential equation
Discretization in time
(Numerical method)
Discrete dynamical system
Discretization
in space
(Computer simulation)


Differential equation
Discretization in time
(Numerical method)
Discrete dynamical system
Discretization
in space
(Computer simulation)
Finite dynamical system


Differential equation
Discretization in time
(Numerical method)
Discrete dynamical system
Discretization
in space
(Computer simulation)
?
Finite dynamical system

Tragiczne konsekwencje błędów numerycznych

- 25. lutego 1991 w czasie I wojny w Zatoce Perskiej rakieta Patriot nie trafiła w iracki Scud. W konsekwencji zginęło 28 Amerykanów.

Tragiczne konsekwencje błędów numerycznych

• 25. lutego 1991 w czasie I wojny w Zatoce Perskiej rakieta Patriot nie trafiła w iracki Scud. W konsekwencji zginęło 28 Amerykanów.

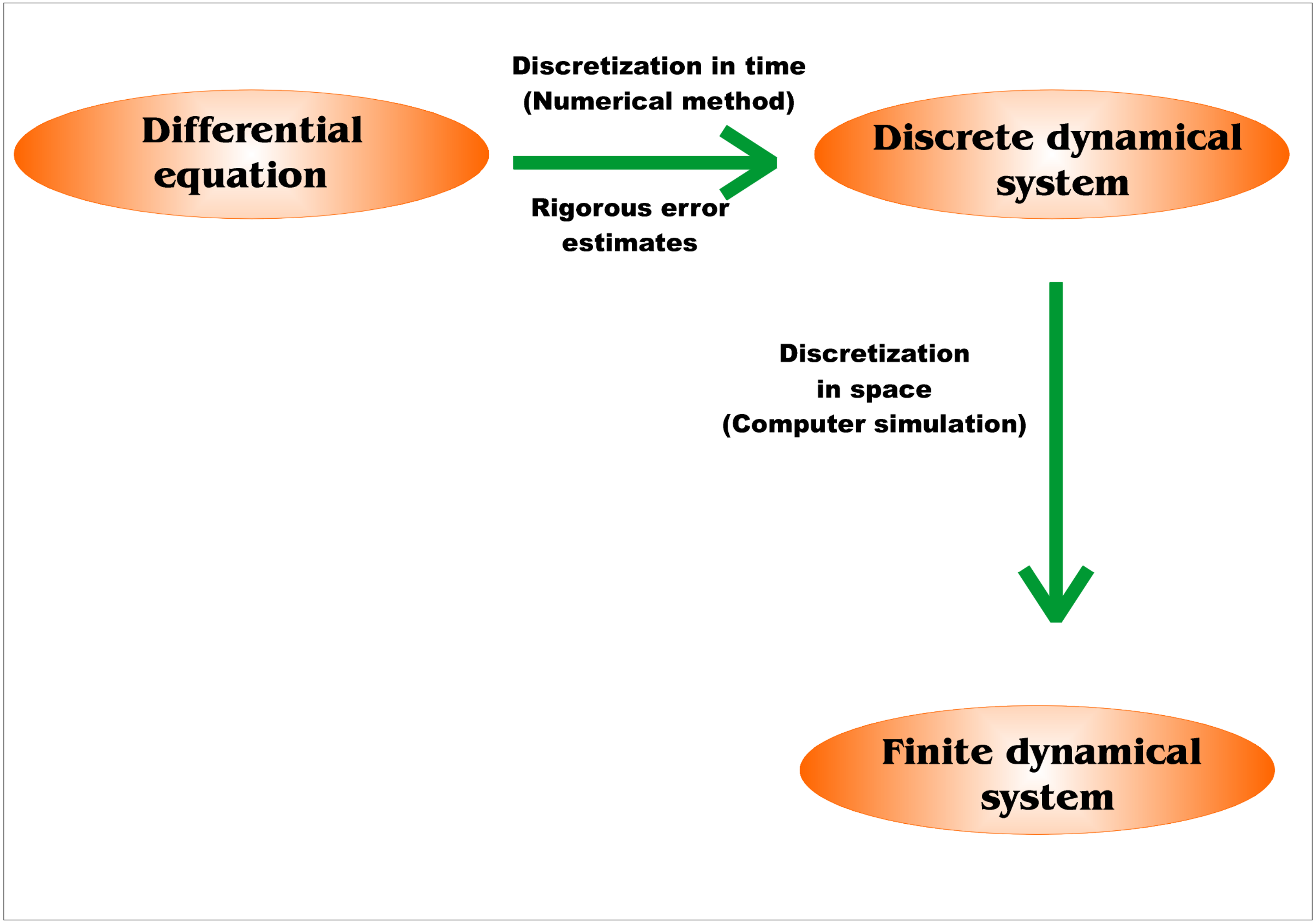
• Pierwszy lot Ariane 5 w dniu 4. czerwca 1996 zakończył się katastrofą przy starcie powodując straty w wysokości $370 milionów USD.

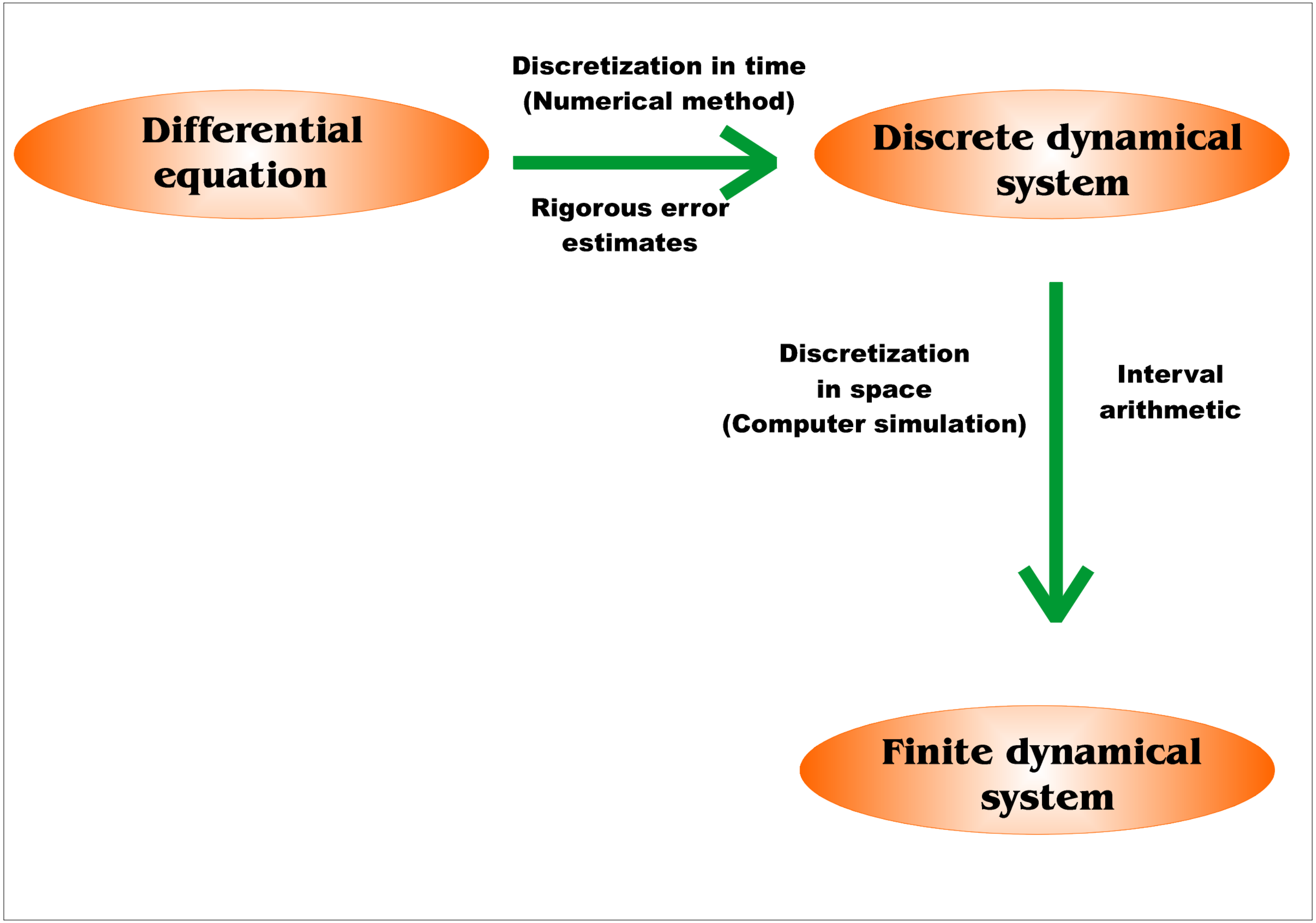
Tragiczne konsekwencje błędów numerycznych

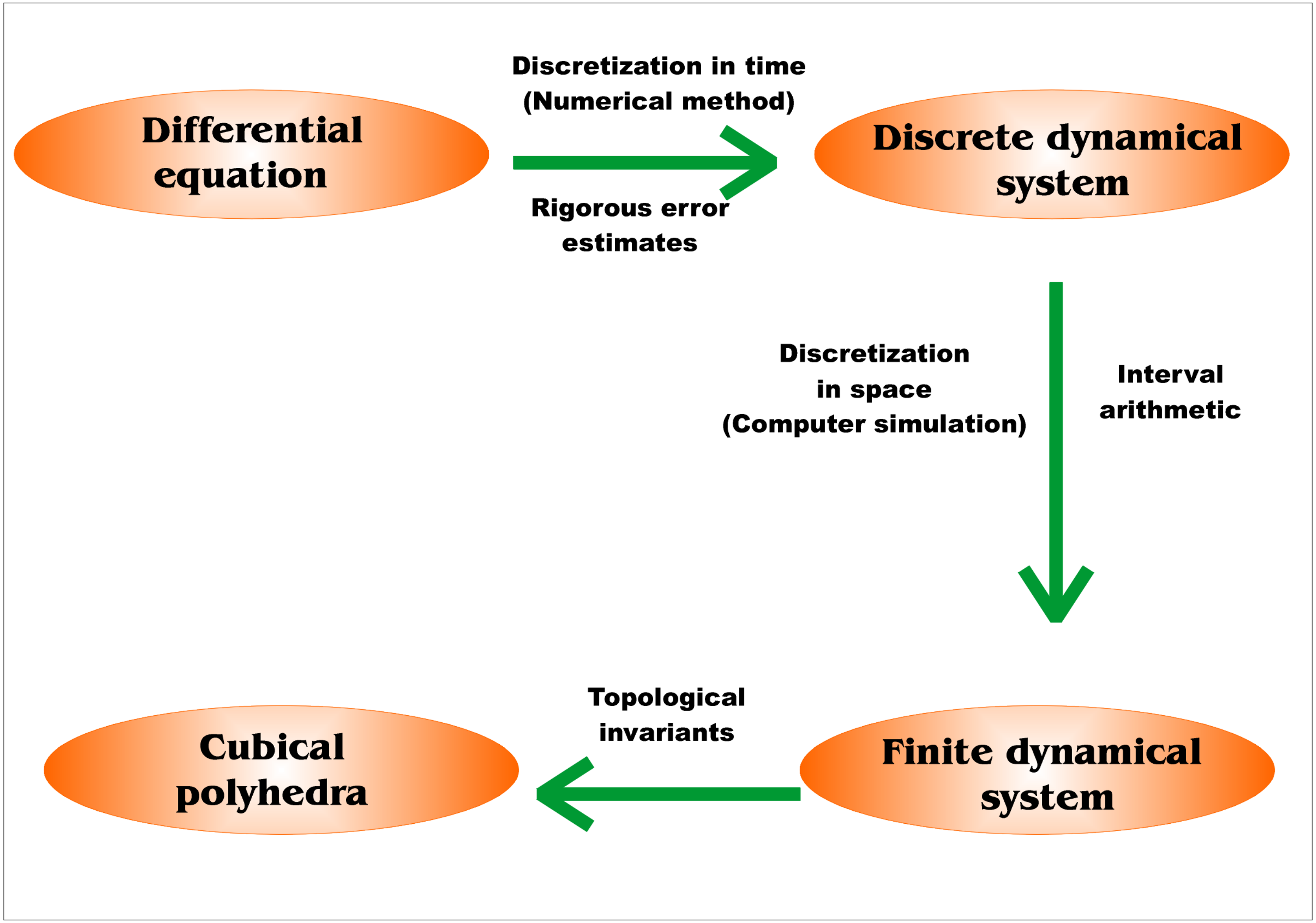
• 25. lutego 1991 w czasie I wojny w Zatoce Perskiej rakieta Patriot nie trafiła w iracki Scud. W konsekwencji zginęło 28 Amerykanów.

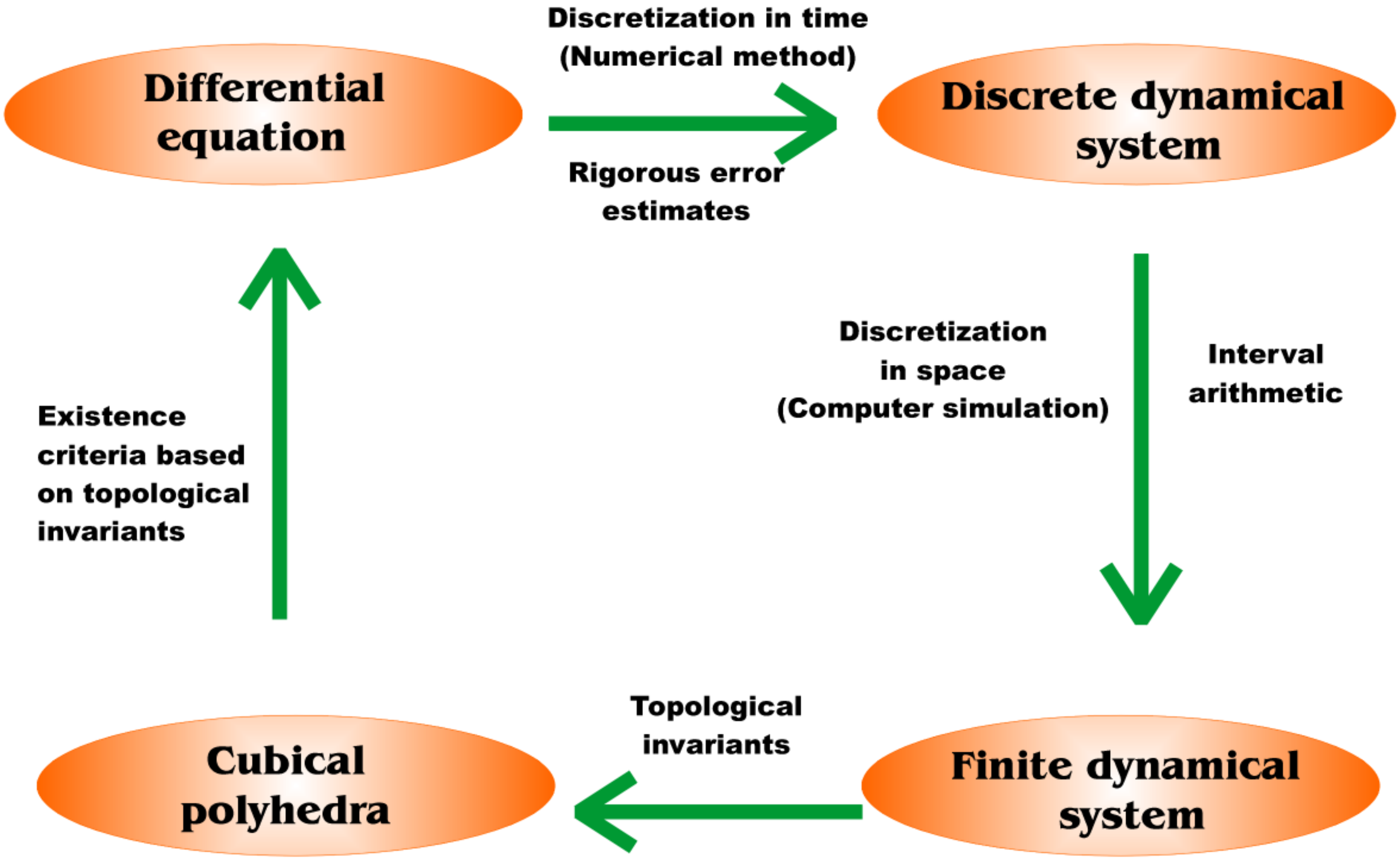
• Pierwszy lot Ariane 5 w dniu 4. czerwca 1996 zakończył się katastrofą przy starcie powodując straty w wysokości $370 milionów USD.

Analiza Numeryczna Układów Dynamicznych




Differential equation
Discretization in time
(Numerical method)
Rigorous error estimates
Discrete dynamical system
Discretization in space
(Computer simulation)
Interval arithmetic
Finite dynamical system


Differential equation
Discretization in time
(Numerical method)
Rigorous error estimates
Discrete dynamical system
Discretization in space
(Computer simulation)
Interval arithmetic
Finite dynamical system
Topological invariants
Cubical polyhedra


Differential equation
Discretization in time
(Numerical method)
Rigorous error estimates
Discrete dynamical system
Discretization
in space
(Computer simulation)
Interval
arithmetic
Finite dynamical system
Topological
invariants
Cubical polyhedra
Existence
criteria based
on topological
invariants

Theorem. (K. Mischaikow, MM, 1995) Consider the Lorenz equations

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

and put

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 53\}.$$

For all parameter values in a sufficiently small neighborhood of $(\sigma, R, b) = (45, 54, 10)$, there exists a Poincaré section $N \subset P$ such that the Poincaré map g induced by (1) is Lipschitz and well defined. Furthermore, there exists a $d \in \mathbb{N}$ and a continuous surjection $\rho : \mathrm{Inv}(N, g) \to \Sigma_2$ such that

$$\rho \circ g^d = \sigma \circ \rho$$

where $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ is the full shift dynamics on two symbols.

Zbiory kostkowe

- Przez kostkę elementarną $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$ rozumiemy iloczyn kartezjański przedziałów I_i o końcach całkowitych i długości 0 (zdegenerowane) lub 1 (niezdegenerowane)

Zbiory kostkowe

- Przez kostkę elementarną $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$ rozumiemy iloczyn kartezjański przedziałów I_i o końcach całkowitych i długości 0 (zdegenerowane) lub 1 (niezdegenerowane)
- $\mathcal{K}$ – rodzina kostek elementarnych
- Zbiór kostkowy to skończona suma mnogościowa kostek elementarnych.

Zbiory kostkowe

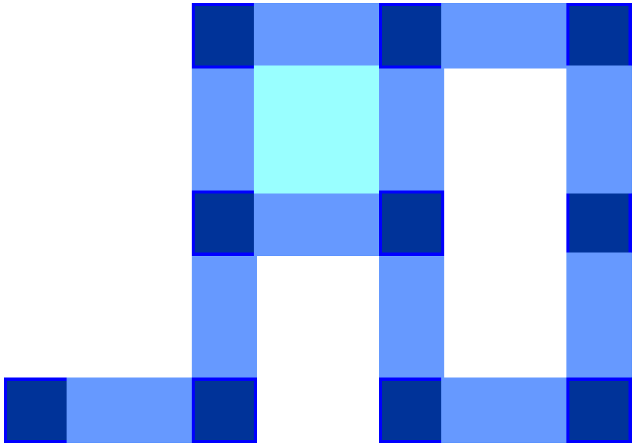
- Przez kostkę elementarną $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$ rozumiemy iloczyn kartezjański przedziałów I_i o końcach całkowitych i długości 0 (zdegenerowane) lub 1 (niezdegenerowane)
- $\mathcal{K}$ – rodzina kostek elementarnych
- Zbiór kostkowy to skończona suma mnogościowa kostek elementarnych.
- Przestrzenią kostkową nazywamy przestrzeń topologiczną homeomorficzną z pewnym zbiorem kostkowym.
- Rodzinę kostek elementarnych $\mathcal{X} \subset \mathcal{K}$ nazywamy reprezentacją przestrzeni kostkowej X, jeżeli X jest homeomorficzne z $\cup\mathcal{X}$.

Zbiory kostkowe

- Przez kostkę elementarną $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$ rozumiemy iloczyn kartezjański przedziałów I_i o końcach całkowitych i długości 0 (zdegenerowane) lub 1 (niezdegenerowane)
- $\mathcal{K}$ – rodzina kostek elementarnych
- Zbiór kostkowy to skończona suma mnogościowa kostek elementarnych.
- Przestrzenią kostkową nazywamy przestrzeń topologiczną homeomorficzną z pewnym zbiorem kostkowym.
- Rodzinę kostek elementarnych $\mathcal{X} \subset \mathcal{K}$ nazywamy reprezentacją przestrzeni kostkowej X, jeżeli X jest homeomorficzne z $\cup\mathcal{X}$.

Theorem. (Blass, Holsztyński, 1972) Każdy (skończony) wielościan jest przestrzenią kostkową.

Zbiór kostkowy 15



Pełne zbiory kostkowe

- Wymiar kostki elementarnej, oznaczany $\dim Q$, to liczba niezdegenerowanych przedziałów w iloczynie kartezjańskim.

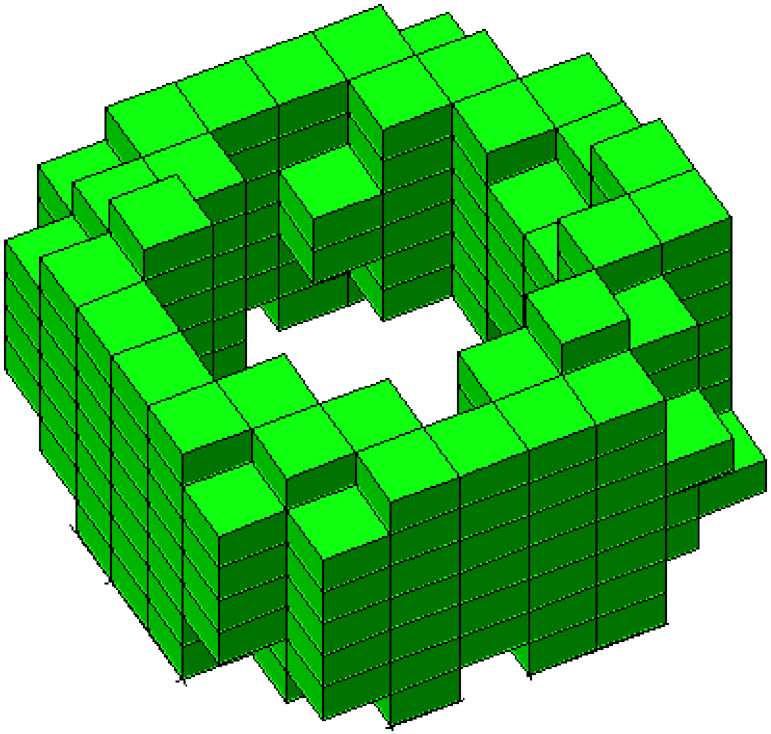
Pełne zbiory kostkowe 16

- Wymiar kostki elementarnej, oznaczany $\dim Q$, to liczba niezdegenerowanych przedziałów w iloczynie kartezjańskim.
- $\mathcal{K}_n$ – rodzina kostek elementarnych wymiaru n
- Kostka elementarna jest pełna jeśli wszystkie przedziały w iloczynie kartezjańskim są niezdegenerowane.

Pełne zbiory kostkowe

- Wymiar kostki elementarnej, oznaczany $\dim Q$, to liczba niezdegenerowanych przedziałów w iloczynie kartezjańskim.
- $\mathcal{K}_n$ – rodzina kostek elementarnych wymiaru n
- Kostka elementarna jest pełna jeśli wszystkie przedziały w iloczynie kartezjańskim są niezdegenerowane.
- Zbiór kostkowy jest pełny jeżeli jest skończoną sumą mnogościową pełnych kostek elementarnych.

Pełny zbiór kostkowy



- Dla kostki elementarnej $Q\mathcal{K}_n$ definiujemy skojarzony łańcuch elementarny jako odwzorowanie $\mathcal{K}_n \to \mathbb{Z}$ dane wzorem

$$\widehat{Q}(P) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } P = Q \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

- Dla kostki elementarnej $Q\mathcal{K}_n$ definiujemy skojarzony łańcuch elementarny jako odwzorowanie $\mathcal{K}_n \to \mathbb{Z}$ dane wzorem

$$\widehat{Q}(P) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } P = Q \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

- Łańcuch kostkowy to skończona kombinacja linowa łańcuchów elementarnych tego samego wymiaru, zwanego wymiarem łańcucha.

Łańcuchy kostkowe

- Dla kostki elementarnej $Q\mathcal{K}_n$ definiujemy skojarzony łańcuch elementarny jako odwzorowanie $\mathcal{K}_n \to \mathbb{Z}$ dane wzorem
$$\widehat{Q}(P) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } P = Q \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$
- Łańcuch kostkowy to skończona kombinacja linowa łańcuchów elementarnych tego samego wymiaru, zwanego wymiarem łańcucha.
- Wszystkie łańcuchy kostkowe wymiaru q tworzą grupę abelową, oznaczaną C_q i zwaną grupą q-łańcuchów.

Łańcuchy kostkowe

- Dla kostki elementarnej $Q\mathcal{K}_n$ definiujemy skojarzony łańcuch elementarny jako odwzorowanie $\mathcal{K}_n \to \mathbb{Z}$ dane wzorem
$$\widehat{Q}(P) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } P = Q \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$
- Łańcuch kostkowy to skończona kombinacja linowa łańcuchów elementarnych tego samego wymiaru, zwanego wymiarem łańcucha.
- Wszystkie łańcuchy kostkowe wymiaru q tworzą grupę abelową, oznaczaną C_q i zwaną grupą q-łańcuchów.

Produkt kostkowy

- Dla dwóch łańcuchów elementarnych $\widehat{P}, \widehat{Q}$ definiujemy ich iloczyn kostkowy jako
$$\widehat{P} \diamond \widehat{Q} := \widehat{P \times Q}.$$
Definicję tę rozszerzamy liniowo na dowolne łańcuchy.

Homomorfizm brzegu

- Homomorfizm brzegu to a homomorfizm $\partial : C_q \to C_{q-1}$ dany na generatorach wzorem

$$\partial\widehat{Q} := \begin{cases} 0 & \text{if } Q = [l], \\ \widehat{[l+1]} - \widehat{[l]} & \text{if } Q = [l, l+1]. \\ \partial\widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim I}\widehat{I} \diamond \partial\widehat{P} & \text{if } Q = I \times P. \end{cases}$$

Homomorfizm brzegu

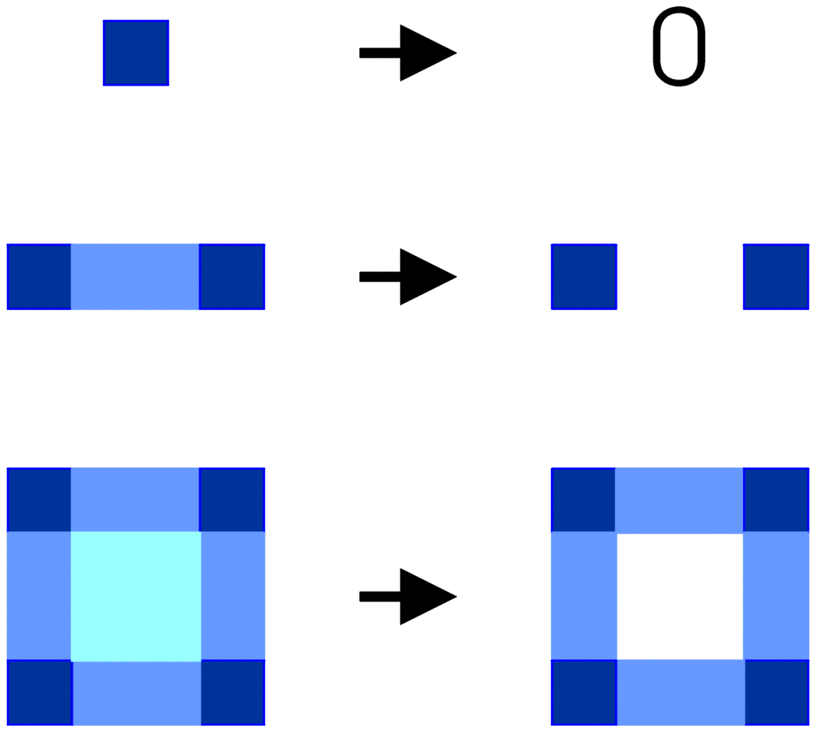
- Homomorfizm brzegu to a homomorfizm $\partial : C_q \to C_{q-1}$ dany na generatorach wzorem

$$\partial\widehat{Q} := \begin{cases} 0 & \text{if } Q = [l], \\ \widehat{[l+1]} - \widehat{[l]} & \text{if } Q = [l, l+1]. \\ \partial\widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim I}\widehat{I} \diamond \partial\widehat{P} & \text{if } Q = I \times P. \end{cases}$$

Theorem.

$$\partial \circ \partial = 0$$

Homomorfizm brzegu dla łańcuchów elementarnych



Grupy łańcuchów zbioru kostkowego

- Dla łańcucha kostkowego $c = \Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i \widehat{Q}_i$ definiujemy jego support jako
$$|c| := \bigcup \{ Q_i \mid \alpha_i \neq 0 \}$$

Grupy łańcuchów zbioru kostkowego

- Dla łańcucha kostkowego $c = \Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i \widehat{Q}_i$ definiujemy jego support jako
$$|c| := \bigcup \{ Q_i \mid \alpha_i \neq 0 \}$$
- Dla zbioru kostkowego X definiujemy grupę q-łańcuchów X jako
$$C_q(X) := \{ c \in C_q \mid |c| \subset X \}.$$

Grupy łańcuchów zbioru kostkowego

- Dla łańcucha kostkowego $c = \Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i \widehat{Q}_i$ definiujemy jego support jako
$$|c| := \cup \{ Q_i \mid \alpha_i \neq 0 \}$$
- Dla zbioru kostkowego X definiujemy grupę q-łańcuchów X jako
$$C_q(X) := \{ c \in C_q \mid |c| \subset X \}.$$
- Mamy też indukowany homomorfizm brzegu
$$\partial_q^X : C_q(X) \to C_{q-1}(X).$$

Homologie kostkowe

- Jądro ∂_q^X zwane jest grupą q-cykli X i oznaczane $Z_q(X)$.

Homologie kostkowe

- Jądro ∂_q^X zwane jest grupą q-cykli X i oznaczane $Z_q(X)$.
- Obraz ∂_{q+1}^X zwany jest grupą q-brzegów X i oznaczany jest $B_q(X)$.

Homologie kostkowe

- Jądro ∂_q^X zwane jest grupą q-cykli X i oznaczane $Z_q(X)$.
- Obraz ∂_{q+1}^X zwany jest grupą q-brzegów X i oznaczany jest $B_q(X)$.
- Mamy $B_q(X) \subset Z_q(X)$,co pozwala zdefiniować q-tą grupę homologii X jako

$$H_q(X) := Z_q(X)/B_q(X)$$

Homologie kostkowe

- Jądro ∂_q^X zwane jest grupą q-cykli X i oznaczane $Z_q(X)$.
- Obraz ∂_{q+1}^X zwany jest grupą q-brzegów X i oznaczany jest $B_q(X)$.
- Mamy $B_q(X) \subset Z_q(X)$,co pozwala zdefiniować q-tą grupę homologii X jako
$$H_q(X) := Z_q(X)/B_q(X)$$
- Przez homologie X rozumiemy kolekcję wszystkich grup homologii $H(X) := \{H_q(X)\}$.

Homologie kostkowe

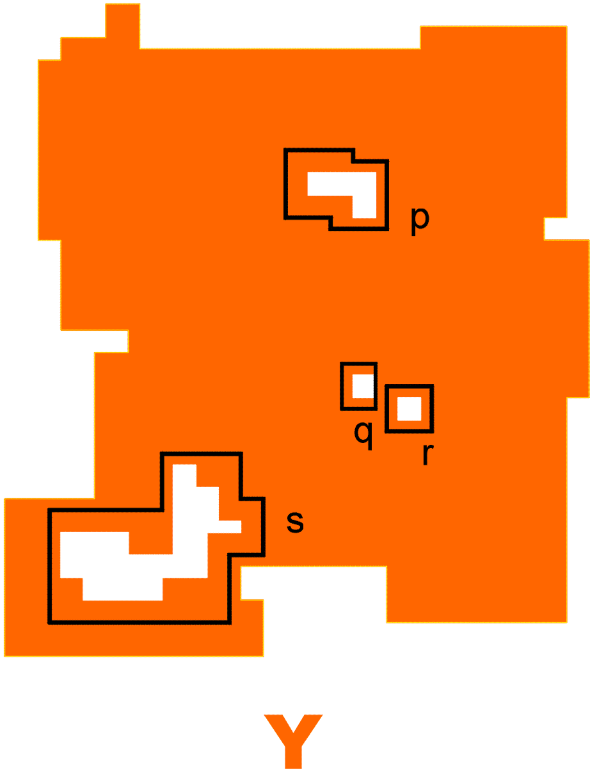
- Jądro ∂_q^X zwane jest grupą q-cykli X i oznaczane $Z_q(X)$.
- Obraz ∂_{q+1}^X zwany jest grupą q-brzegów X i oznaczany jest $B_q(X)$.
- Mamy $B_q(X) \subset Z_q(X)$,co pozwala zdefiniować q-tą grupę homologii X jako

$$H_q(X) := Z_q(X)/B_q(X)$$

- Przez homologie X rozumiemy kolekcję wszystkich grup homologii $H(X) := \{H_q(X)\}$.

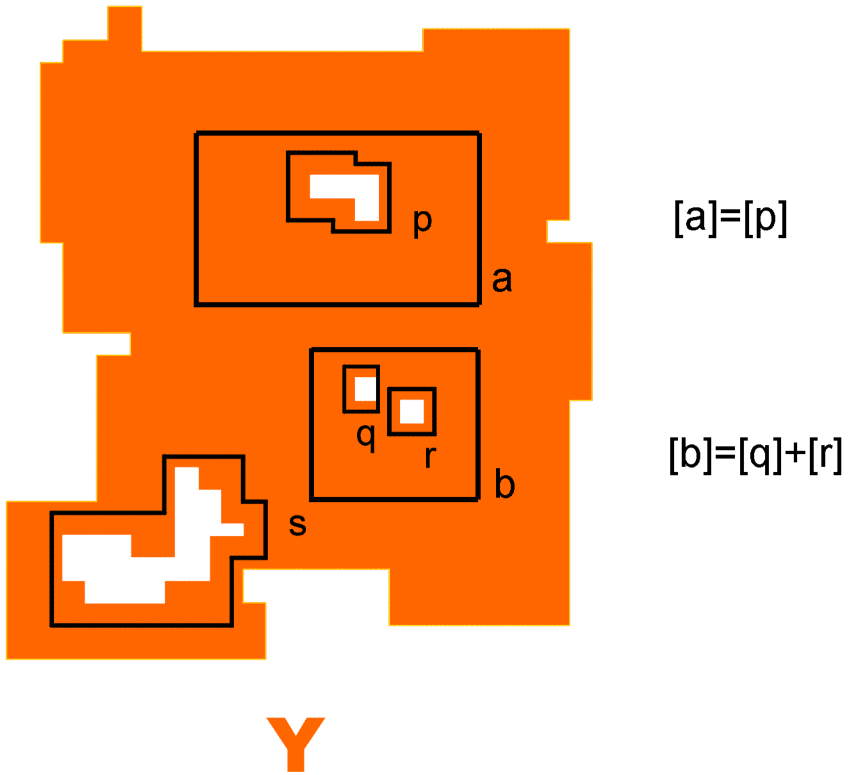
Theorem. Jeżeli X i Y są homeomorficznymi zbiorami kostkowymi, to $H(X)$ and $H(Y)$ są izomorficzne.

Homologie kostkowe



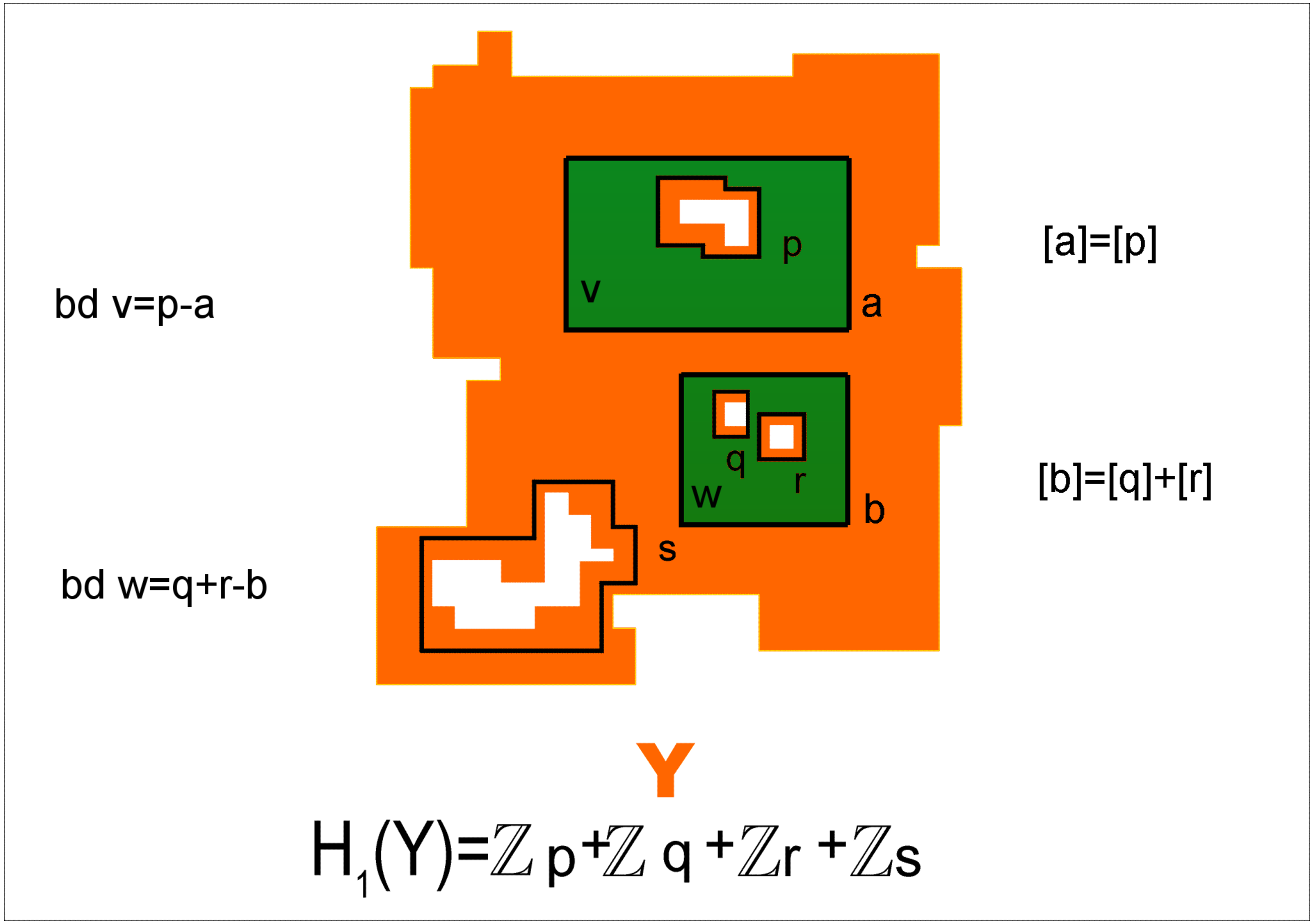
$$H_1(Y)=\mathbb{Z}\,p+\mathbb{Z}\,q+\mathbb{Z}\,r+\mathbb{Z}\,s$$

Homologie kostkowe



$$H_1(Y) = \mathbb{Z}\,p + \mathbb{Z}\,q + \mathbb{Z}\,r + \mathbb{Z}\,s$$

Homologie kostkowe



Theorem. (Smith, 1861) Let G and G' be free abelian groups of ranks n and m respectively; let $f : G \to G'$ be a homomorphism. Then there are bases for G and G' such that, relative to these bases, the matrix of f has the form

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} b_1 & & & & 0 & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & 0 \\ & & & \cdot & & \\ 0 & & & & b_l & \\ \hline & & 0 & & & 0 \end{array}\right]$$

where $b_i \geqslant 1$ and $b_1 | b_2 | \ldots | b_l$.

Bazy standardowe kompleksów łańcuchowych

Theorem. Let $\mathcal{C} = \{C_p, \partial_p\}$ be a chain complex; suppose each group C_p is free of finite rank. Then for each p there are subgroups U_p, V_p, W_p of C_p such that

$$C_p = U_p \oplus V_p \oplus W_p,$$

where $\partial_p(U_p) \subset W_{p-1}$, $\partial_p(V_p) = 0$ and $\partial_p(W_p) = 0$. Furthermore, there are bases for U_p and W_{p-1} relative to which $\partial_{p+1} : U_{p+1} \to W_p$ has a matrix of the form

$$\begin{bmatrix} b_1 & & & & 0 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & b_l \end{bmatrix}$$

where $b_i \geqslant 1$ and $b_1 | b_2 | \ldots | b_l$. In particular

$$H_p(\mathcal{C}) = V_p \oplus (W_p / B_p)$$

Złożoność algorytmu Smitha

mierzona w zależności od $s = m + n + \log k$, gdzie
m, n — liczba wierszy i kolumn macierzy
k — największa wartość bezwzględna elementów macierzy

- $O(2^s)$ — klasyczny algorytm Smitha (1861)

Złożoność algorytmu Smitha

mierzona w zależności od $s = m + n + \log k$, gdzie
m, n — liczba wierszy i kolumn macierzy
k — największa wartość bezwzględna elementów macierzy

- $O(2^s)$ — klasyczny algorytm Smitha (1861)
- $O(s^{11})$ — R. Kannan, A. Bachem (1979)

Złożoność algorytmu Smitha

mierzona w zależności od $s = m + n + \log k$, gdzie
m, n — liczba wierszy i kolumn macierzy
k — największa wartość bezwzględna elementów macierzy

- $O(2^s)$ — klasyczny algorytm Smitha (1861)
- $O(s^{11})$ — R. Kannan, A. Bachem (1979)
- $O(s^5)$ — C.S. Illiopoulos (1989)

Złożoność algorytmu Smitha

mierzona w zależności od $s = m + n + \log k$, gdzie
m, n — liczba wierszy i kolumn macierzy
k — największa wartość bezwzględna elementów macierzy

- $O(2^s)$ — klasyczny algorytm Smitha (1861)
- $O(s^{11})$ — R. Kannan, A. Bachem (1979)
- $O(s^5)$ — C.S. Illiopoulos (1989)
- $O^{\sim}(s^{\theta+1})$ — A. Storjohann (1996) — najlepszy znany deterministyczny ($\theta \approx 2.376...$)

Złożoność algorytmu Smitha

mierzona w zależności od $s = m + n + \log k$, gdzie
m, n — liczba wierszy i kolumn macierzy
k — największa wartość bezwzględna elementów macierzy

- $O(2^s)$ — klasyczny algorytm Smitha (1861)
- $O(s^{11})$ — R. Kannan, A. Bachem (1979)
- $O(s^5)$ — C.S. Illiopoulos (1989)
- $O^{\sim}(s^{\theta+1})$ — A. Storjohann (1996) — najlepszy znany deterministyczny ($\theta \approx 2.376...$)
- probabilistyczny dla rzadkich macierzy: $O(s^3 \log^2 s)$ — M. Giesbrecht (2000)

Złożoność algorytmu Smitha

mierzona w zależności od $s = m + n + \log k$, gdzie
m, n — liczba wierszy i kolumn macierzy
k — największa wartość bezwzględna elementów macierzy

- $O(2^s)$ — klasyczny algorytm Smitha (1861)
- $O(s^{11})$ — R. Kannan, A. Bachem (1979)
- $O(s^5)$ — C.S. Illiopoulos (1989)
- $O^{\sim}(s^{\theta+1})$ — A. Storjohann (1996) — najlepszy znany deterministyczny ($\theta \approx 2.376...$)
- probabilistyczny dla rzadkich macierzy: $O(s^3 \log^2 s)$ — M. Giesbrecht (2000)
- probabilistyczny $O(s^{3.5} \log^{4.5} s)$ — W. Eberly, M. Giesbrecht, G. Villard (2000)

Złożoność algorytmu Smitha

mierzona w zależności od $s = m + n + \log k$, gdzie
m, n — liczba wierszy i kolumn macierzy
k — największa wartość bezwzględna elementów macierzy

- $O(2^s)$ — klasyczny algorytm Smitha (1861)
- $O(s^{11})$ — R. Kannan, A. Bachem (1979)
- $O(s^5)$ — C.S. Illiopoulos (1989)
- $O^{\sim}(s^{\theta+1})$ — A. Storjohann (1996) — najlepszy znany deterministyczny ($\theta \approx 2.376...$)
- probabilistyczny dla rzadkich macierzy: $O(s^3 \log^2 s)$ — M. Giesbrecht (2000)
- probabilistyczny $O(s^{3.5} \log^{4.5} s)$ — W. Eberly, M. Giesbrecht, G. Villard (2000)

Wejście dla algorytmu liczącego homologie zbiorów

Standardowo na wejściu algebraicznego algorytmu liczącego homologie oczekuje się macierzy homomorfizmu brzegu.

Wejście dla algorytmu liczącego homologie zbiorów

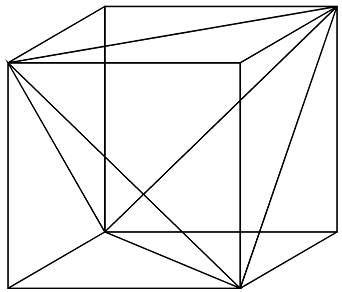
Standardowo na wejściu algebraicznego algorytmu liczącego homologie oczekuje się macierzy homomorfizmu brzegu.

- Algorytm liczący homologie zbioru na wejściu przyjmuje listę komórek maksymalnego wymiaru (sympleksów, kostek, CW kompleksów)

Wejście dla algorytmu liczącego homologie zbiorów

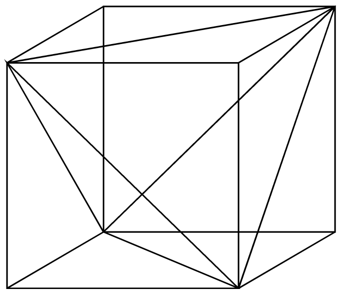
Standardowo na wejściu algebraicznego algorytmu liczącego homologie oczekuje się macierzy homomorfizmu brzegu.

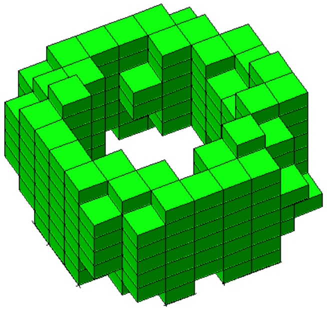
- Algorytm liczący homologie zbioru na wejściu przyjmuje listę komórek maksymalnego wymiaru (sympleksów, kostek, CW kompleksów)
- Generowanie ścian i macierzy homomorfizmu brzegu jest nieodłączną częścią algorytmu liczącego homologie zbiorów!



Kompleks symplicjalny

- klasyczna

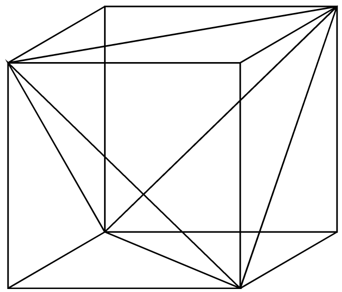


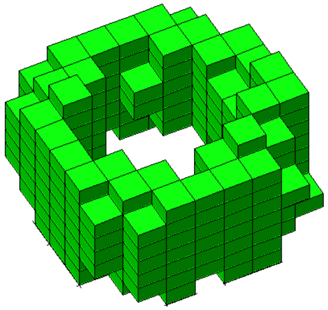


Kompleks symplicjalny

- klasyczna

Zbiór kostkowy





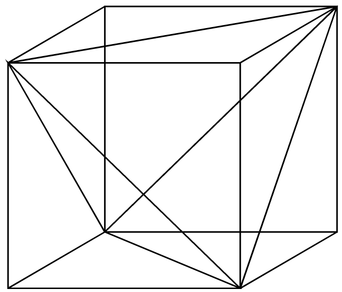
Kompleks symplicjalny

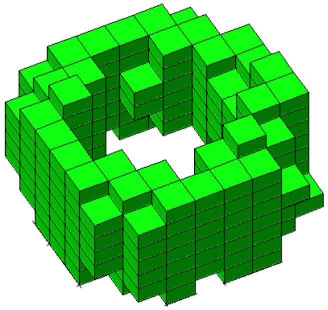
- klasyczna

Zbiór kostkowy

- typowa w analizie obrazów i ścisłej analizie numerycznej
- bardzo szybka i efektywna (bit-mapy)

Reprezentacje zbiorów



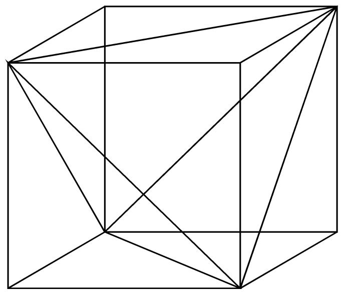


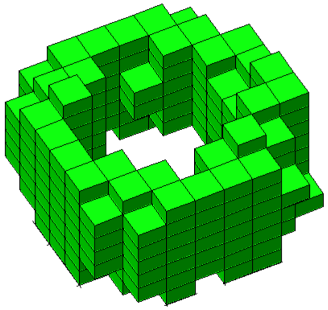
Kompleks symplicjalny

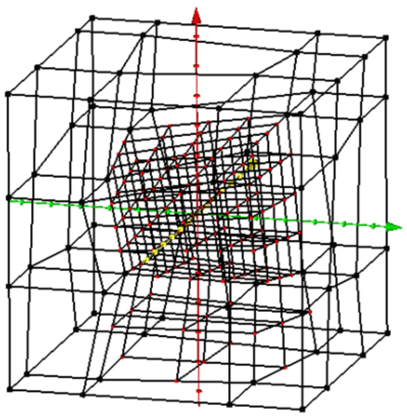
- klasyczna

Zbiór kostkowy

- typowa w analizie obrazów i ścisłej analizie numerycznej
- bardzo szybka i efektywna (bit-mapy)
- prowadzi bezpośrednio do homologii kostkowych
- zła dla niejednostajnych przypadków







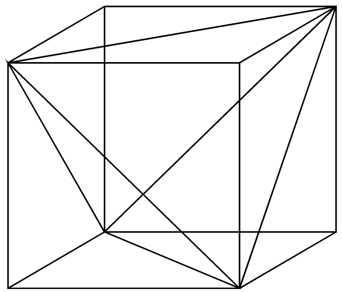
Kompleks symplicjalny

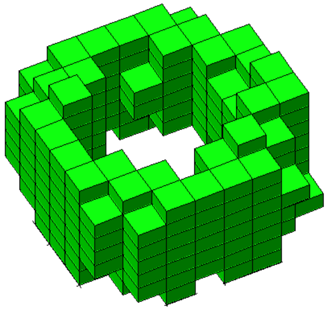
- klasyczna

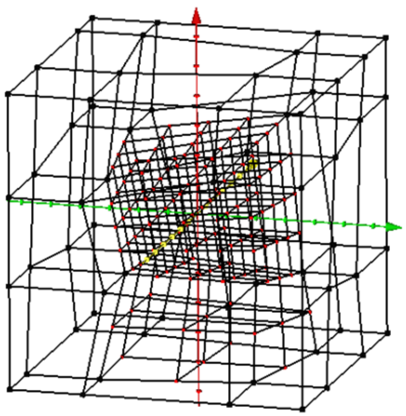
Zbiór kostkowy

- typowa w analizie obrazów i ścisłej analizie numerycznej
- bardzo szybka i efektywna (bitmapy)
- prowadzi bezpośrednio do homologii kostkowych
- zła dla niejednostajnych przypadków

Reprezentacje zbiorów







Kompleks symplicjalny

- klasyczna

Zbiór kostkowy

- typowa w analizie obrazów i ścisłej analizie numerycznej
- bardzo szybka i efektywna (bitmapy)
- prowadzi bezpośrednio do homologii kostkowych
- zła dla niejednostajnych przypadków

Dowolne wielościany

- najogólniejsza
- otrzymanie kompleksu łańcuchowego jest trudne

Triangulacja kostki

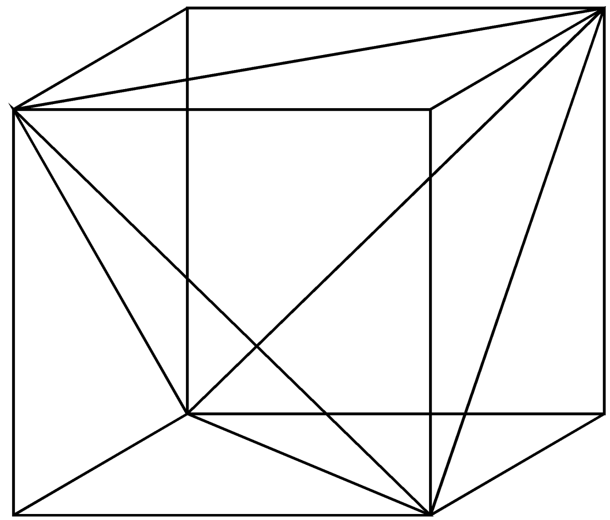
- Ile potrzeba sympleksów by striangulować d-kostkę?

Triangulacja kostki

- Ile potrzeba sympleksów by striangulować d-kostkę?
- Nie więcej niż $d!$, ale czy da się lepiej?

Triangulacja kostki

- Ile potrzeba sympleksów by striangulować d-kostkę?
- Nie więcej niż $d!$, ale czy da się lepiej?

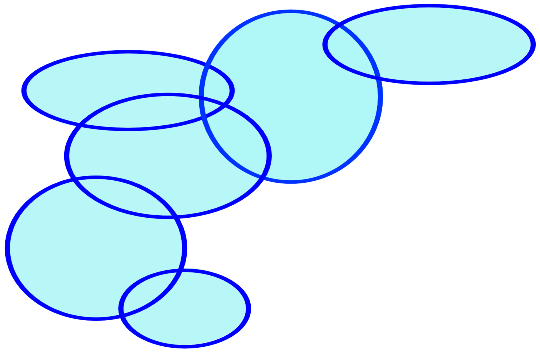


Triangulacja kostki

Theorem. Hughes, Anderson (1995), Bliss, Su (2005)

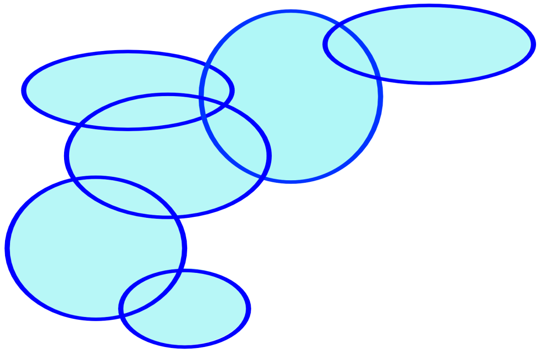
d	1	2	3	4	5	6	7
$T^v(d)$	1	2	5	16	67	308	1493
$T(d)$	1	2	5	16	?	?	?

Podejście poprzez homologie Čecha



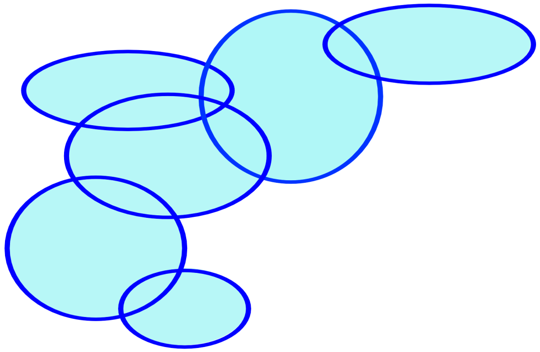
- Struktura Čecha : skończona, niepusta rodzina $\mathcal{X}$ niepustych, zwartych, wypukłych podzbiorów $\mathbb{R}^d$

Podejście poprzez homologie Čecha



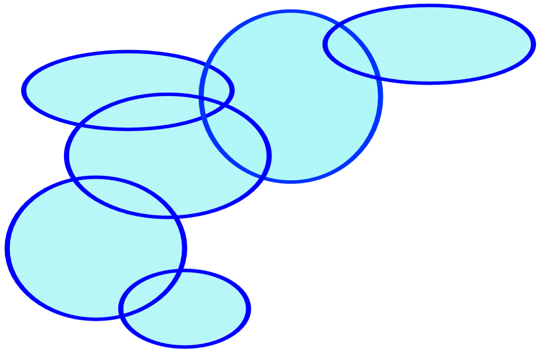
- Struktura Čecha : skończona, niepusta rodzina $\mathcal{X}$ niepustych, zwartych, wypukłych podzbiorów $\mathbb{R}^d$
- support $\mathcal{X}$: suma mnogościowa $\mathcal{X}$, oznaczana $|\mathcal{X}| := \cup\mathcal{X}$

Podejście poprzez homologie Čecha



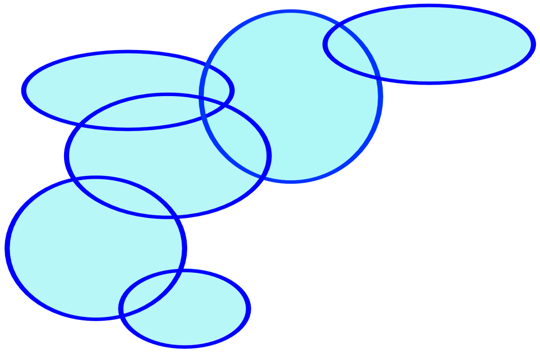
- Struktura Čecha : skończona, niepusta rodzina $\mathcal{X}$ niepustych, zwartych, wypukłych podzbiorów $\mathbb{R}^d$
- support $\mathcal{X}$: suma mnogościowa $\mathcal{X}$, oznaczana $|\mathcal{X}| := \cup\,\mathcal{X}$
- wielościan Čecha: support struktury Čecha

Podejście poprzez homologie Čecha



- Struktura Čecha : skończona, niepusta rodzina $\mathcal{X}$ niepustych, zwartych, wypukłych podzbiorów $\mathbb{R}^d$
- support $\mathcal{X}$: suma mnogościowa $\mathcal{X}$, oznaczana $|\mathcal{X}| := \cup\mathcal{X}$
- wielościan Čecha: support struktury Čecha
- nerw struktury Čecha

Podejście poprzez homologie Čecha

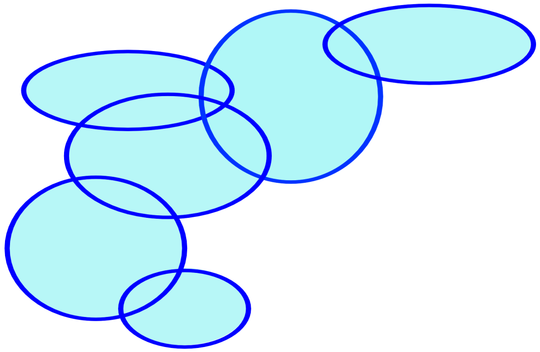


- Struktura Čecha : skończona, niepusta rodzina $\mathcal{X}$ niepustych, zwartych, wypukłych podzbiorów $\mathbb{R}^d$
- support $\mathcal{X}$: suma mnogościowa $\mathcal{X}$, oznaczana $|\mathcal{X}| := \cup\mathcal{X}$
- wielościan Čecha: support struktury Čecha
- nerw struktury Čecha

$$K(\mathcal{X}) := \{\, \mathcal{S} \subset \mathcal{X} \mid \cap\mathcal{S} \neq \emptyset \,\}$$

$K(\mathcal{X})$ ma strukturę abstrakcyjnego kompleksu symplicjalnego.

Podejście poprzez homologie Čecha

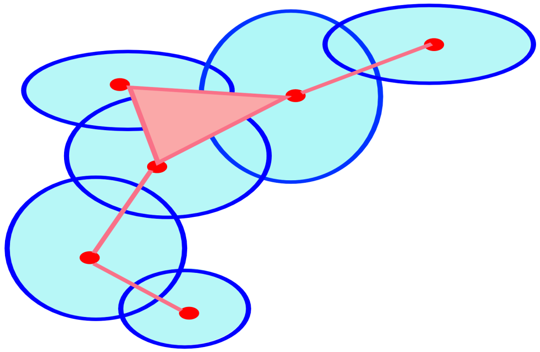


- Struktura Čecha : skończona, niepusta rodzina $\mathcal{X}$ niepustych, zwartych, wypukłych podzbiorów $\mathbb{R}^d$
- support $\mathcal{X}$: suma mnogościowa $\mathcal{X}$, oznaczana $|\mathcal{X}| := \cup\mathcal{X}$
- wielościan Čecha: support struktury Čecha
- nerw struktury Čecha

$$K(\mathcal{X}) := \{\, \mathcal{S} \subset \mathcal{X} \mid \cap\mathcal{S} \neq \emptyset \,\}$$

$K(\mathcal{X})$ ma strukturę abstrakcyjnego kompleksu symplicjalnego.

Podejście poprzez homologie Čech



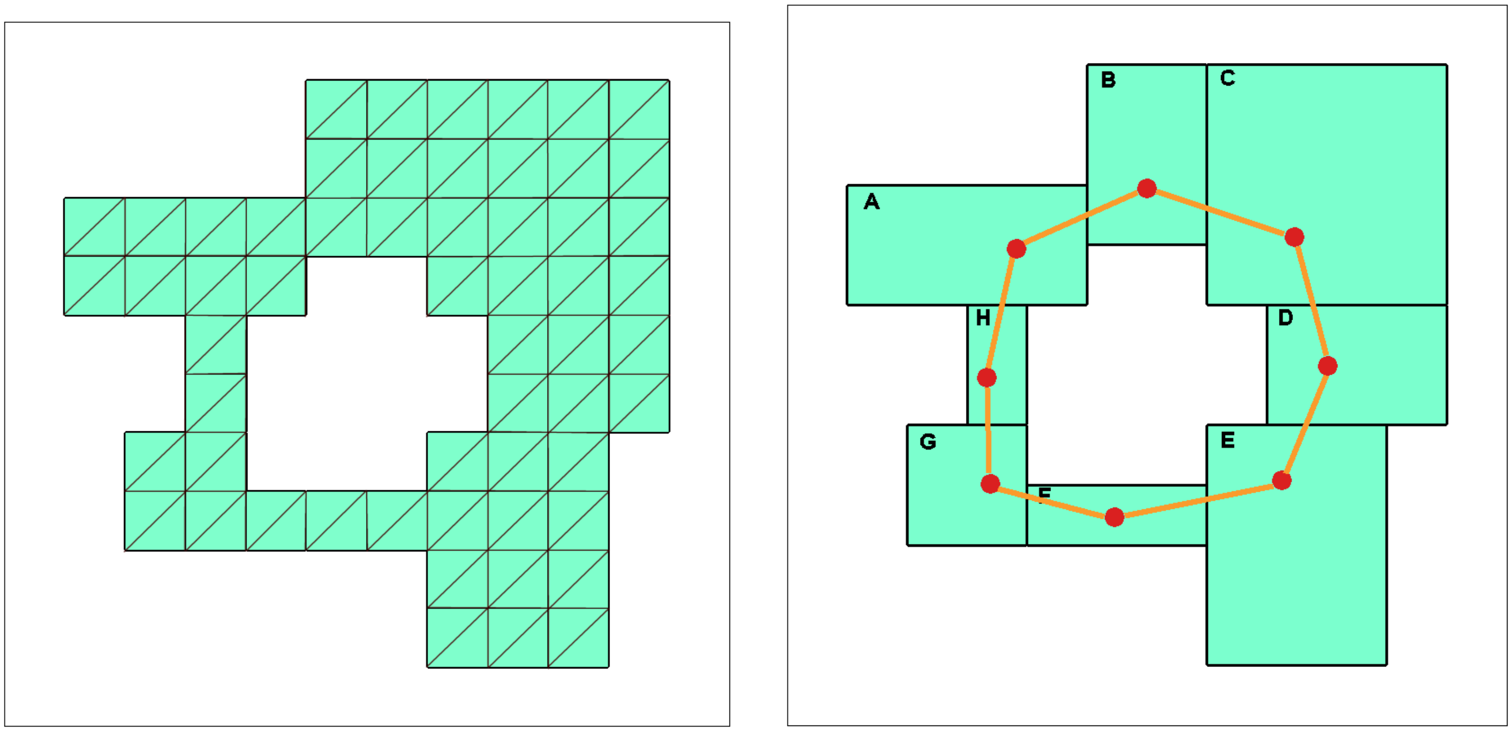
- Struktura Čecha : skończona, niepusta rodzina $\mathcal{X}$ niepustych, zwartych, wypukłych podzbiorów $\mathbb{R}^d$
- support $\mathcal{X}$: suma mnogościowa $\mathcal{X}$, oznaczana $|\mathcal{X}| := \cup\mathcal{X}$
- wieościanČecha: support struktury Čecha
- nerw struktury Čecha

$$K(\mathcal{X}) := \{\, \mathcal{S} \subset \mathcal{X} \mid \cap\mathcal{S} \neq \emptyset \,\}$$

$K(\mathcal{X})$ ma strukturę abstrakcyjnego kompleksu symplicjalnego.

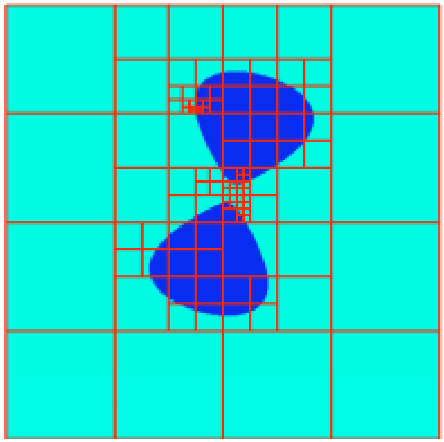
Theorem. Corollary of the Nerve Theorem (Borsuk 1948, Weil 1952, Wu 1962 ...) The homology of a nerve of a Čech polyhedron X does not depend on the Čech structure and is isomorphic to the singular homology of X.

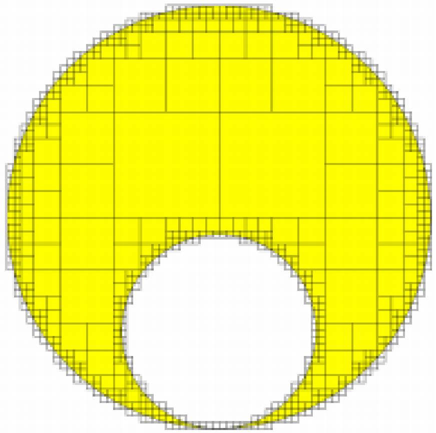
Reprezentacja Čecha



Reprezentacja symplicjalna, a reprezentacja Čecha

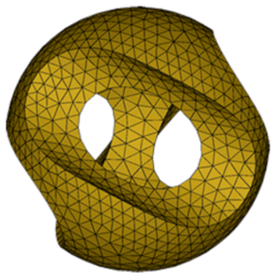
Prostopadłościenne CW kompleksy





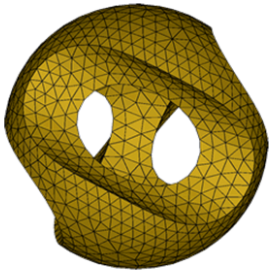
Natychmiastowa algebraizacja:

Podejście standardowe



Natychmiastowa algebraizacja:

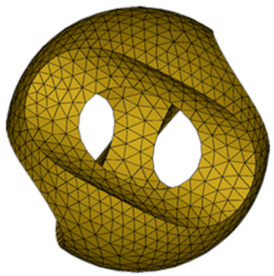
- wygenerować ściany



Natychmiastowa algebraizacja:

- wygenerować ściany
- skonstruować homomorfizm brzegu

$$D_k = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$



Natychmiastowa algebraizacja:

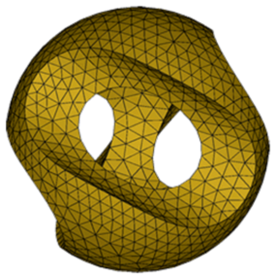
- wygenerować ściany
- skonstruować homomorfizm brzegu
- wyznaczyć diagonalizację Smitha i odczytać liczby Bettiego

$$D_k = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$B_k = Q^{-1} D_k R$$

$$B_k = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Podejście standardowe



$$D_k = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$B_k \; = \; Q^{-1} D_k R$$

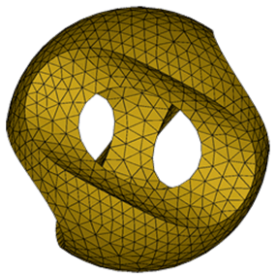
$$B_k \; = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Natychmiastowa algebraizacja:

- wygenerować ściany
- skonstruować homomorfizm brzegu
- wyznaczyć diagonalizację Smitha i odczytać liczby Bettiego

Zalety:

- standardowa algebra liniowa
- łatwo adaptować do liczenia generatorów homologii



$$D_k = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$B_k = Q^{-1} D_k R$$

$$B_k = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Natychmiastowa algebraizacja:

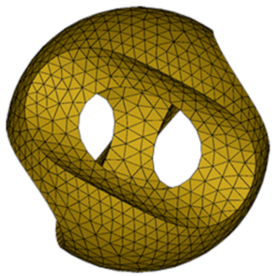
- wygenerować ściany
- skonstruować homomorfizm brzegu
- wyznaczyć diagonalizację Smitha i odczytać liczby Bettiego

Zalety:

- standardowa algebra liniowa
- łatwo adaptować do liczenia generatorów homologii

Problemy:

- natychmiastowe generowanie ścian zwiększa rozmiar danych



$$D_k = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$B_k = Q^{-1} D_k R$$

$$B_k = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Natychmiastowa algebraizacja:

- wygenerować ściany
- skonstruować homomorfizm brzegu
- wyznaczyć diagonalizację Smitha i odczytać liczby Bettiego

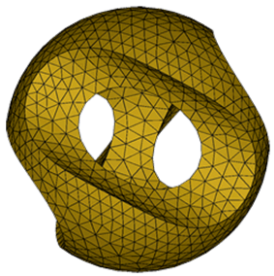
Zalety:

- standardowa algebra liniowa
- łatwo adaptować do liczenia generatorów homologii

Problemy:

- natychmiastowe generowanie ścian zwiększa rozmiar danych
- złożoność: Cn^3

Podejście standardowe



$$D_k = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & \ldots \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \ldots \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \ldots \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$B_k = Q^{-1} D_k R$$

$$B_k = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Natychmiastowa algebraizacja:

- wygenerować ściany
- skonstruować homomorfizm brzegu
- wyznaczyć diagonalizację Smitha i odczytać liczby Bettiego

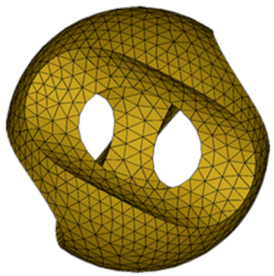
Zalety:

- standardowa algebra liniowa
- łatwo adaptować do liczenia generatorów homologii

Problemy:

- natychmiastowe generowanie ścian zwiększa rozmiar danych
- złożoność: Cn^3
- rzadkość macierzy nie pomaga (fill-in)

Podejście standardowe



$$D_k = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$B_k = Q^{-1} D_k R$$

$$B_k = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Natychmiastowa algebraizacja:

- wygenerować ściany
- skonstruować homomorfizm brzegu
- wyznaczyć diagonalizację Smitha i odczytać liczby Bettiego

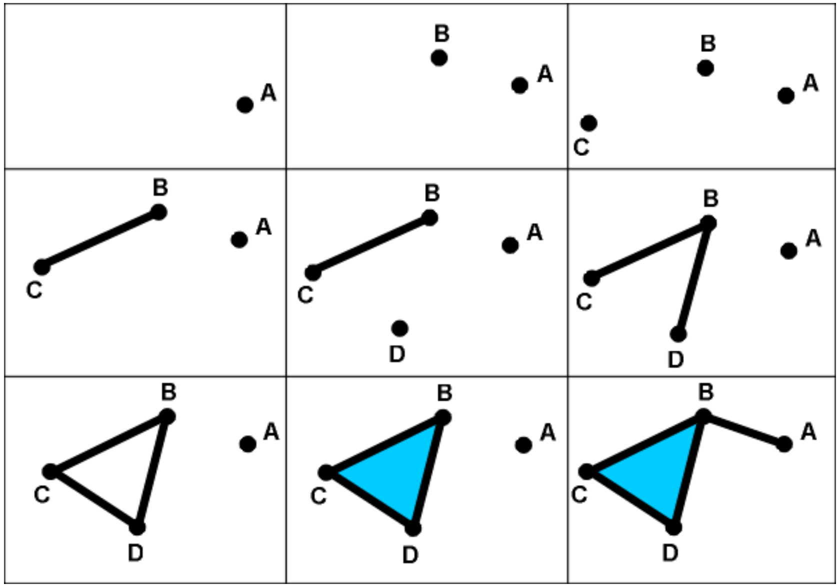
Zalety:

- standardowa algebra liniowa
- łatwo adaptować do liczenia generatorów homologii

Problemy:

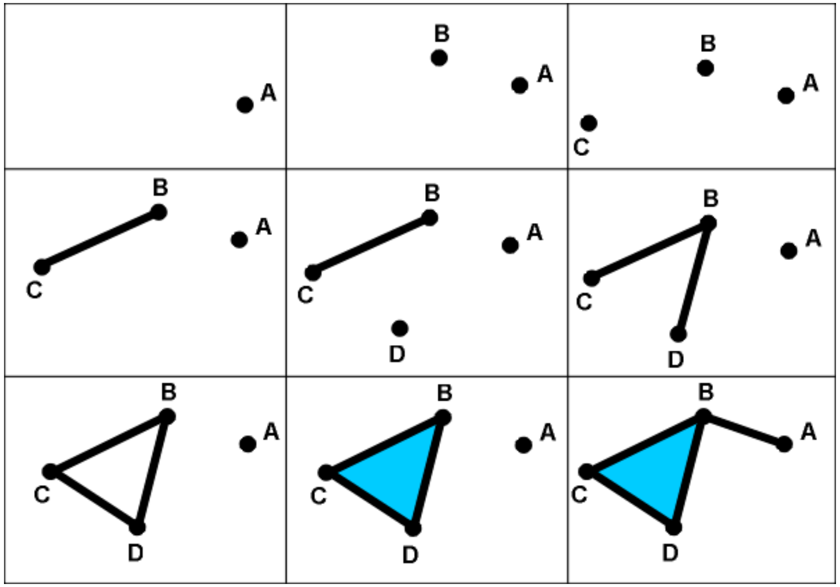
- natychmiastowe generowanie ścian zwiększa rozmiar danych
- złożoność: Cn^3
- rzadkość macierzy nie pomaga (fill-in)
- C duże dla rzadkich macierzy (dynamic storage allocation)

Algorytm Delfinado-Edelsbrunnera (1995)



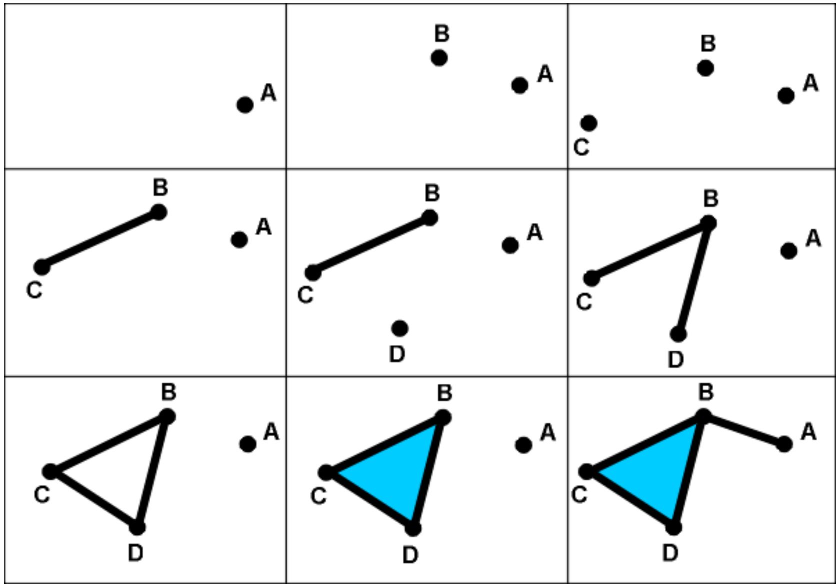
- filtr $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ triangulacji S^3 na wejściu

Algorytm Delfinado-Edelsbrunnera (1995)



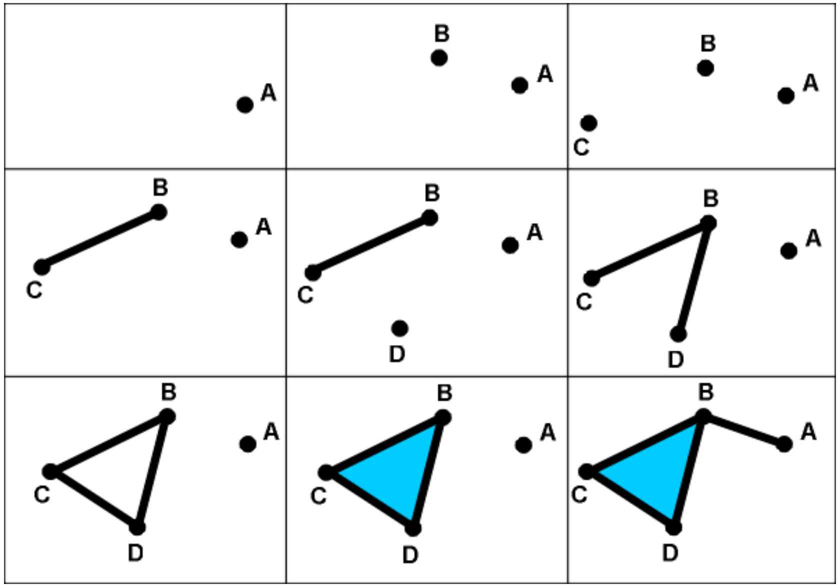
- filtr $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ triangulacji S^3 na wejściu
- oblicza liczby Bettiego $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ podwielościanów S^3

Algorytm Delfinado-Edelsbrunnera (1995)



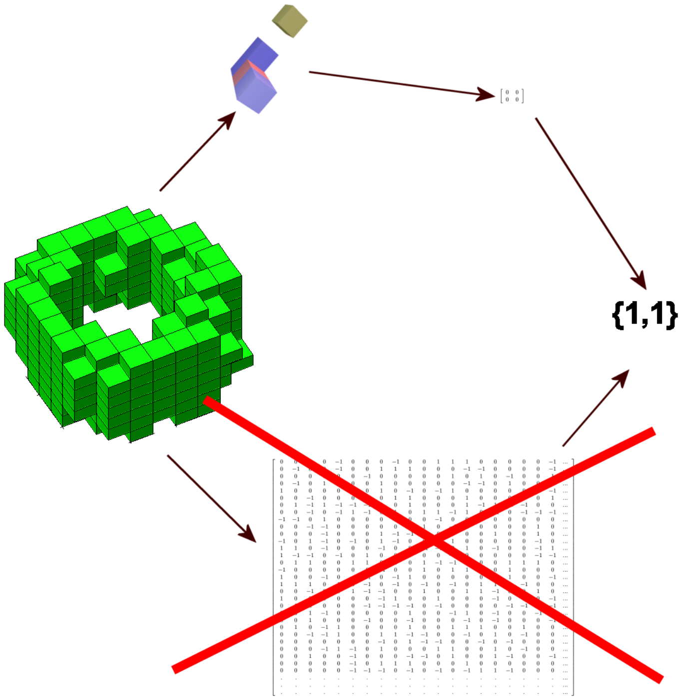
- filtr $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ triangulacji S^3 na wejściu
- oblicza liczby Bettiego $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ podwielościanów S^3
- złożoność: $Cn\alpha(n)$

Algorytm Delfinado-Edelsbrunnera (1995)

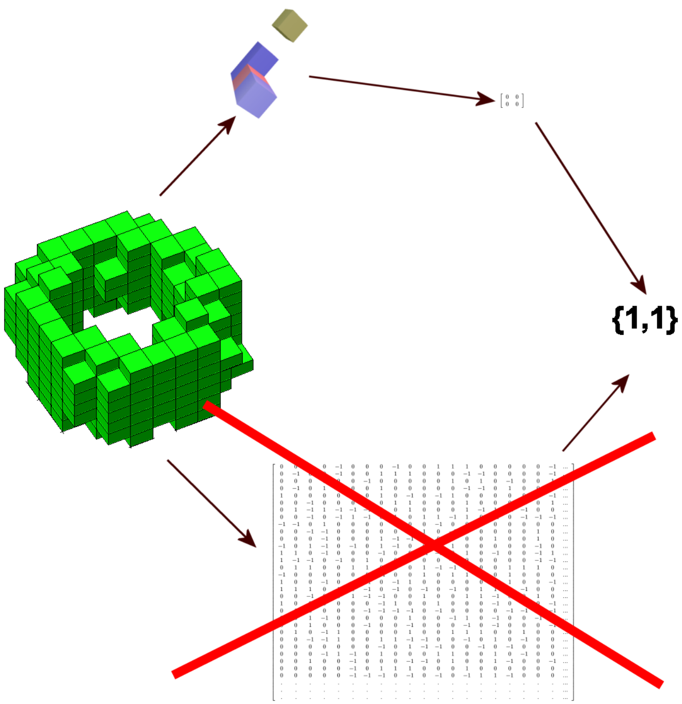


- filtr $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ triangulacji S^3 na wejściu
- oblicza liczby Bettiego $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ podwielościanów S^3
- złożoność: $Cn\alpha(n)$
- zastępuje algebrę kombinatoryką

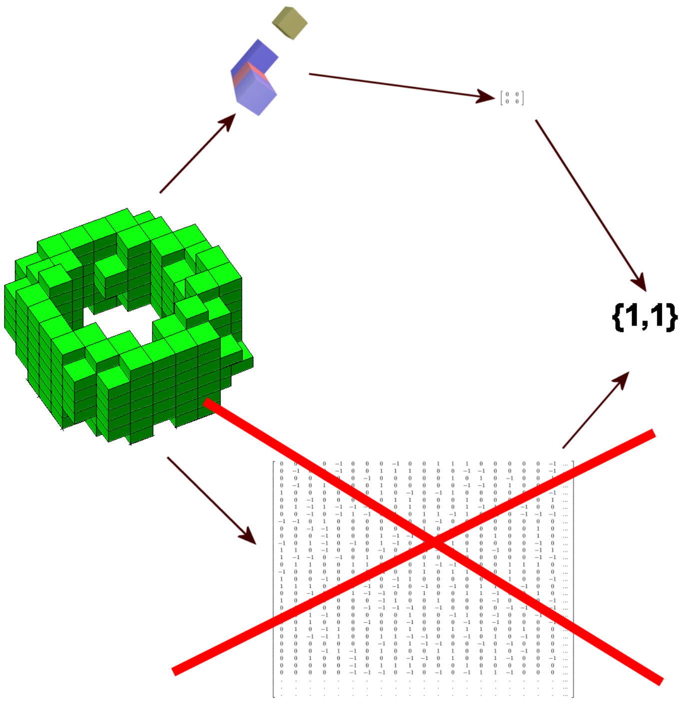
Podejście redukcyjne



Podejście redukcyjne

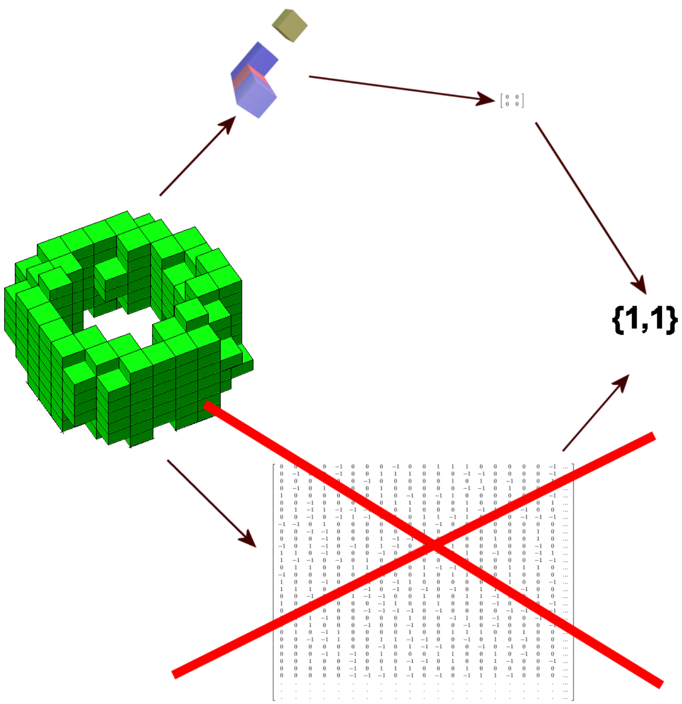


- Zredukuj zbiór tak, by
  - zachować stosowany sposób reprezentacji



Podejście redukcyjne

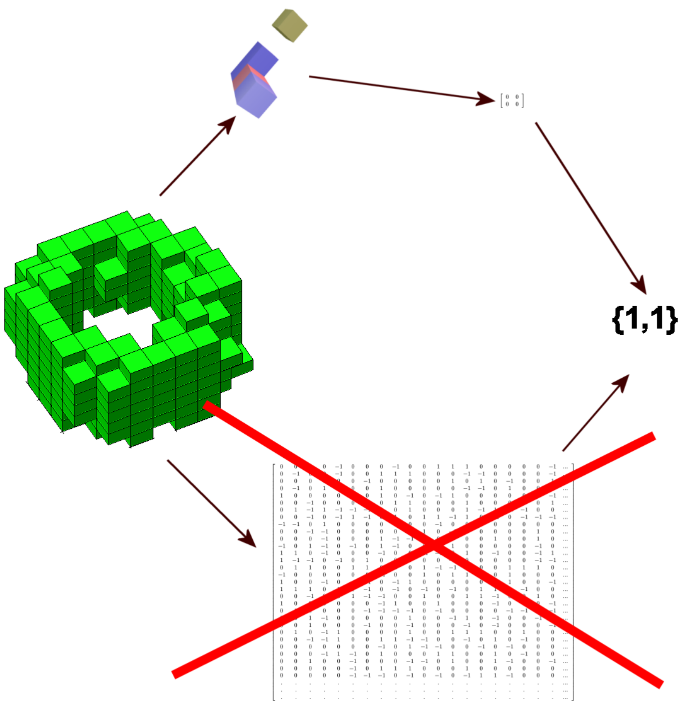
- Zredukuj zbiór tak, by
  - zachować stosowany sposób reprezentacji
  - nie zmienić homologii



Podejście redukcyjne

- Zredukuj zbiór tak, by
  - zachować stosowany sposób reprezentacji
  - nie zmienić homologii
- zbuduj kompleks łańcuchowy

Algorytmy redukcji

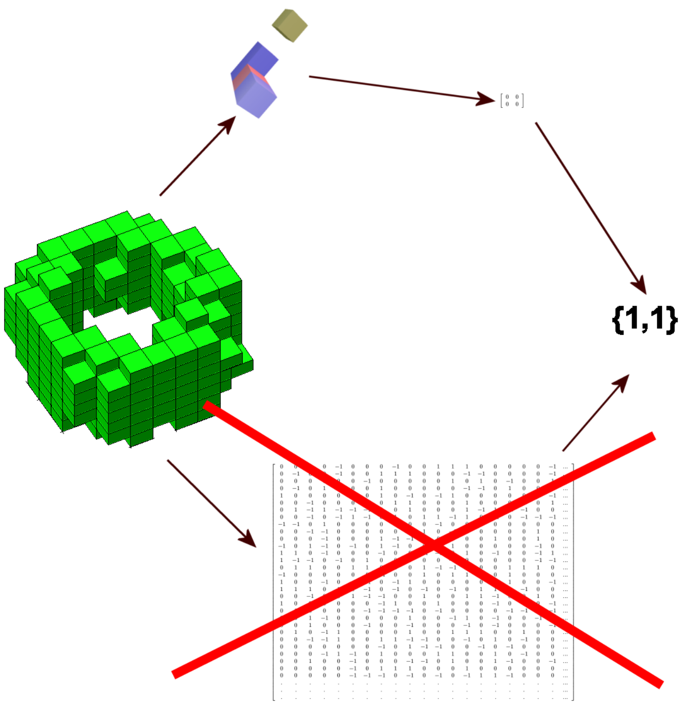


Podejście redukcyjne

- Zredukuj zbiór tak, by
  - zachować stosowany sposób reprezentacji
  - nie zmienić homologii
- zbuduj kompleks łańcuchowy
- oblicz homologie

Zalety:

- bardzo efektywna reprezentacja: bitmapy



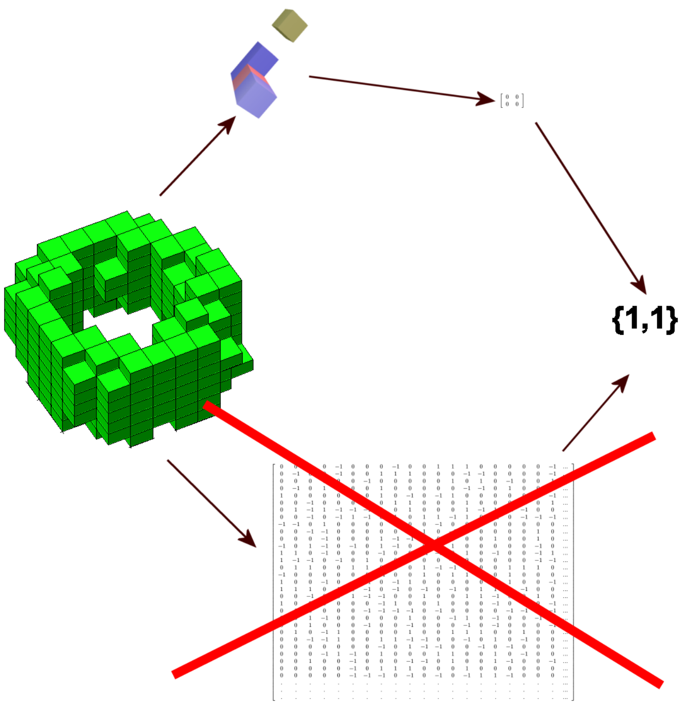
Podejście redukcyjne

- Zredukuj zbiór tak, by
  - zachować stosowany sposób reprezentacji
  - nie zmienić homologii
- zbuduj kompleks łańcuchowy
- oblicz homologie

Zalety:

- bardzo efektywna reprezentacja: bitmapy
- algebraizacja stosowana do znacznie mniejszego zbioru

Algorytmy redukcji

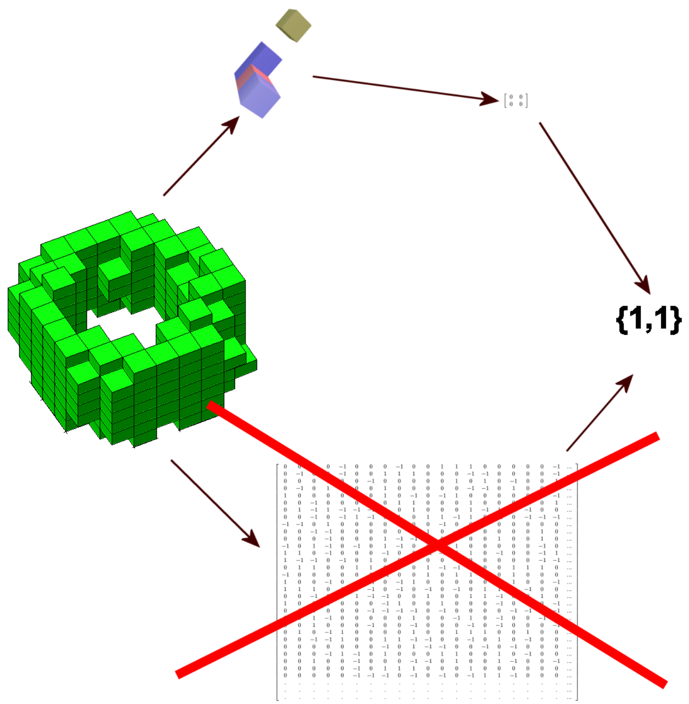


Podejście redukcyjne

- Zredukuj zbiór tak, by
  - zachować stosowany sposób reprezentacji
  - nie zmienić homologii
- zbuduj kompleks łańcuchowy
- oblicz homologie

Zalety:

- bardzo efektywna reprezentacja: bitmapy
- algebraizacja stosowana do znacznie mniejszego zbioru
- zyski widoczne tylko gdy:
  - złożoność redukcji to Cn z małym C



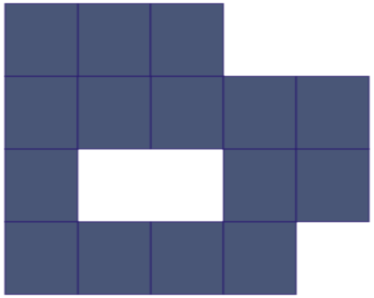
Podejście redukcyjne

- Zredukuj zbiór tak, by
  - zachować stosowany sposób reprezentacji
  - nie zmienić homologii
- zbuduj kompleks łańcuchowy
- oblicz homologie

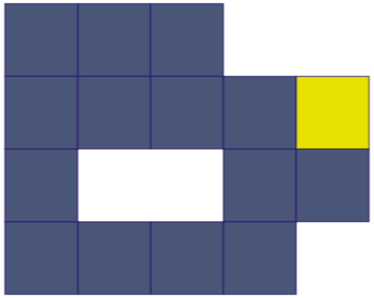
Zalety:

- bardzo efektywna reprezentacja: bitmapy
- algebraizacja stosowana do znacznie mniejszego zbioru
- zyski widoczne tylko gdy:
  - złożoność redukcji to Cn z małym C
  - zbiór po redukcji jest znacznie mniejszy

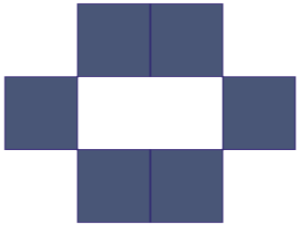
Shaving 46



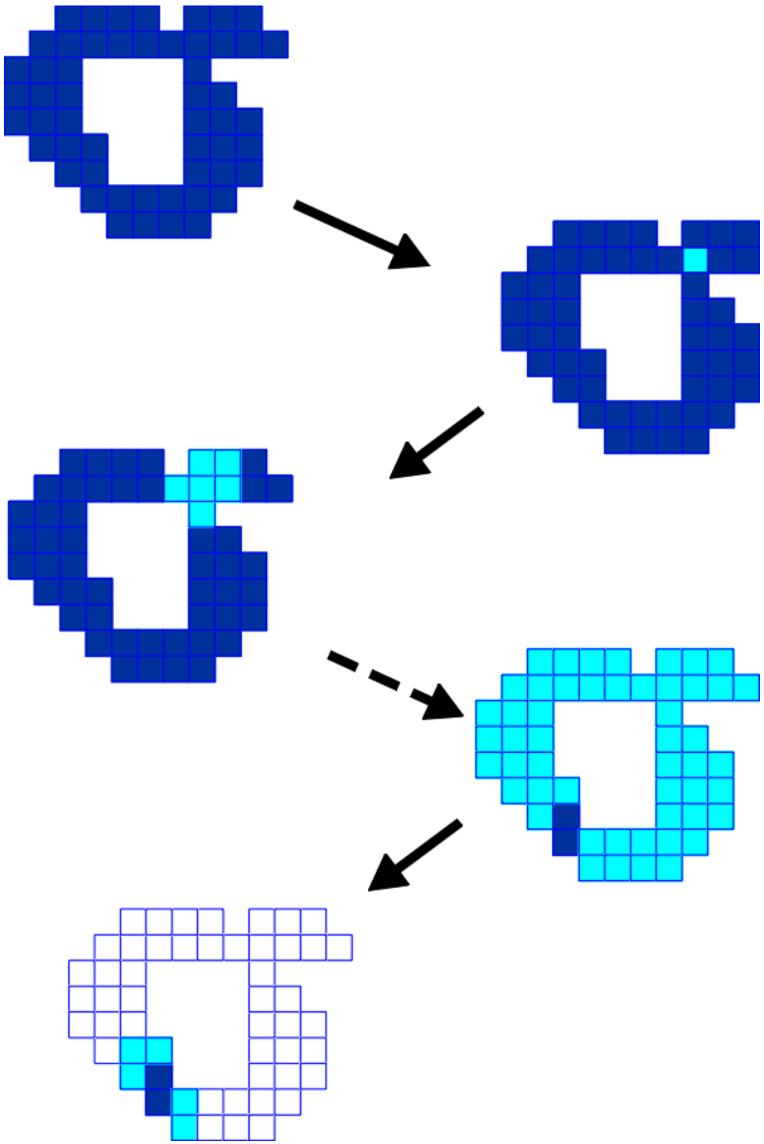
Shaving 47



Shaving



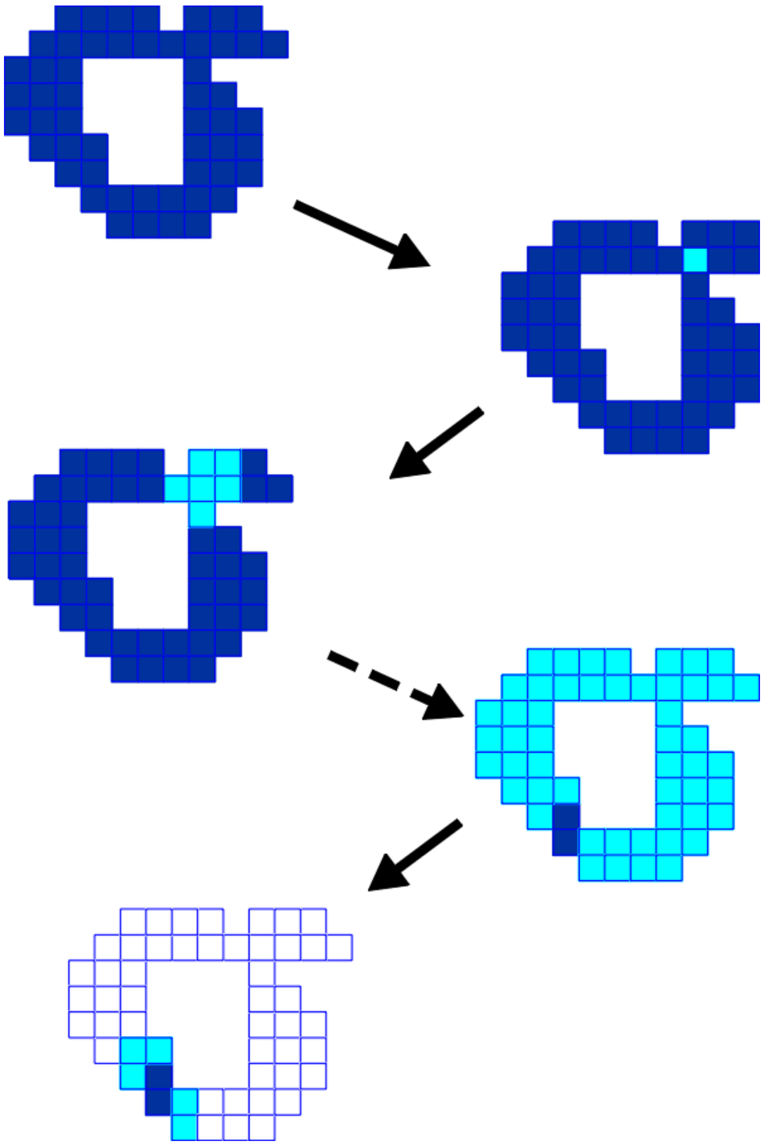
Podprzestrzeń acykliczna



- Jeżeli X jest kostkowy, a $A \subset X$ jest acykliczny to

$$H_n(X) \cong \begin{cases} H_n(X,A), & \text{for } n \geqslant 1 \\ \mathbb{Z} \oplus H_n(X,A), & \text{for } n = 0 \end{cases}$$

Podprzestrzeń acykliczna

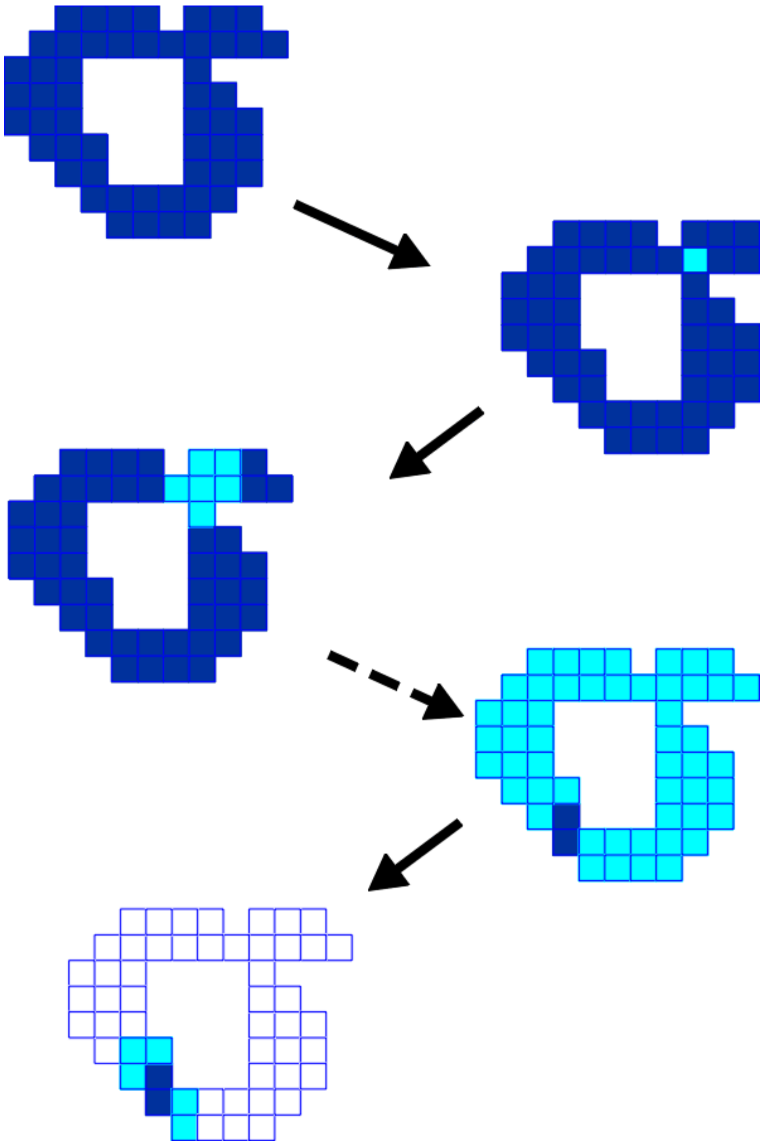


- Jeżeli X jest kostkowy, a $A \subset X$ jest acykliczny to

$$H_n(X) \cong \begin{cases} H_n(X,A), & \text{for } n \geqslant 1 \\ \mathbb{Z} \oplus H_n(X,A), & \text{for } n = 0 \end{cases}$$

- konstrukcja BFS

Podprzestrzeń acykliczna

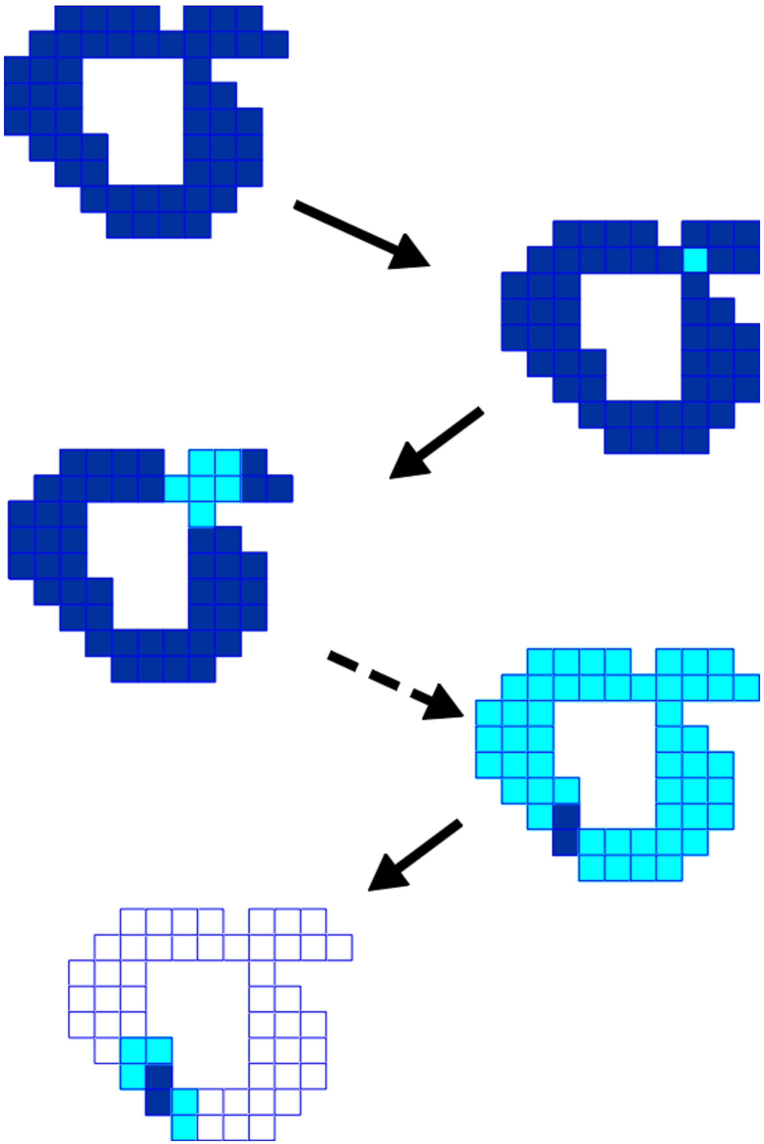


- Jeżeli X jest kostkowy, a $A \subset X$ jest acykliczny to

$$H_n(X) \cong \begin{cases} H_n(X, A), & \text{for } n \geqslant 1 \\ \mathbb{Z} \oplus H_n(X, A), & \text{for } n = 0 \end{cases}$$

- konstrukcja BFS
- używana reprezentacja oparta o pełne kostki!

Podprzestrzeń acykliczna

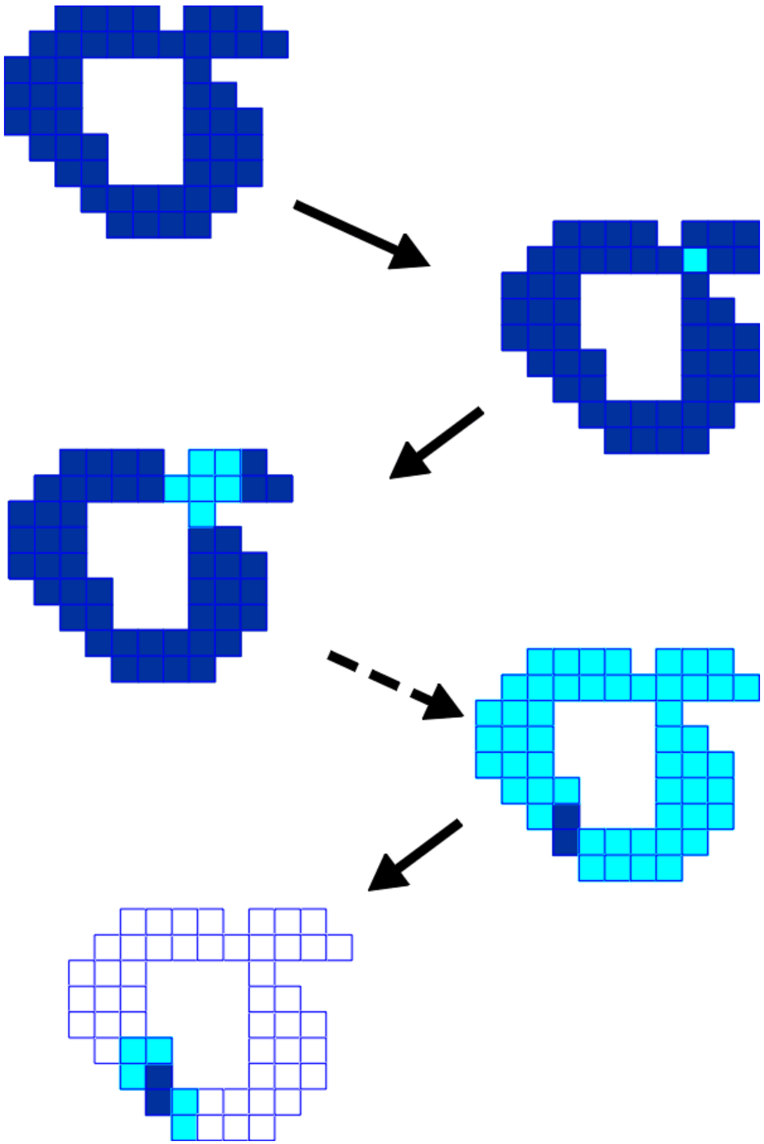


- Jeżeli X jest kostkowy, a $A \subset X$ jest acykliczny to

$$H_n(X) \cong \begin{cases} H_n(X, A), & \text{for } n \geqslant 1 \\ \mathbb{Z} \oplus H_n(X, A), & \text{for } n = 0 \end{cases}$$

- konstrukcja BFS
- używana reprezentacja oparta o pełne kostki!
- test acykliczności poprzez "lookup tables":
  - tablica o $2^{3^d - 1}$ elementach

Podprzestrzeń acykliczna

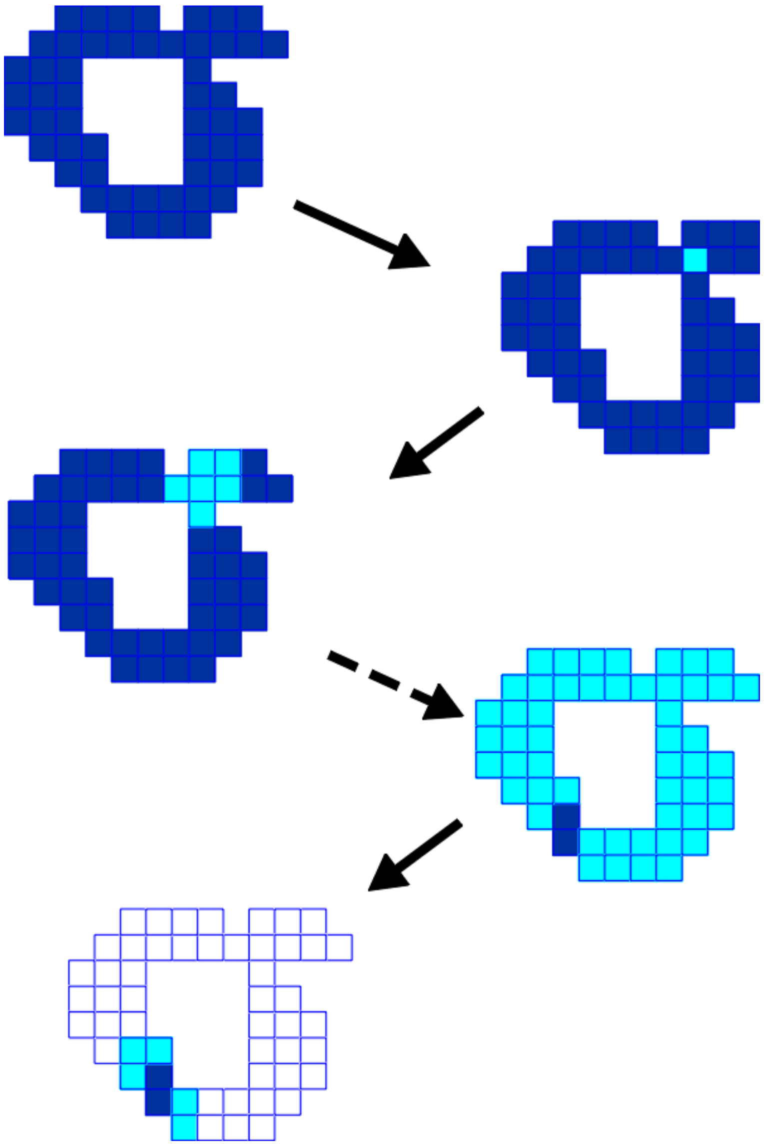


- Jeżeli X jest kostkowy, a $A \subset X$ jest acykliczny to

$$H_n(X) \cong \begin{cases} H_n(X, A), & \text{for } n \geqslant 1 \\ \mathbb{Z} \oplus H_n(X, A), & \text{for } n = 0 \end{cases}$$

- konstrukcja BFS
- używana reprezentacja oparta o pełne kostki!
- test acykliczności poprzez "lookup tables":
  - tablica o 2^{3^d-1} elementach
  - ekstremalnie szybkie rozwiązanie w wymiarze 2 i 3

Podprzestrzeń acykliczna

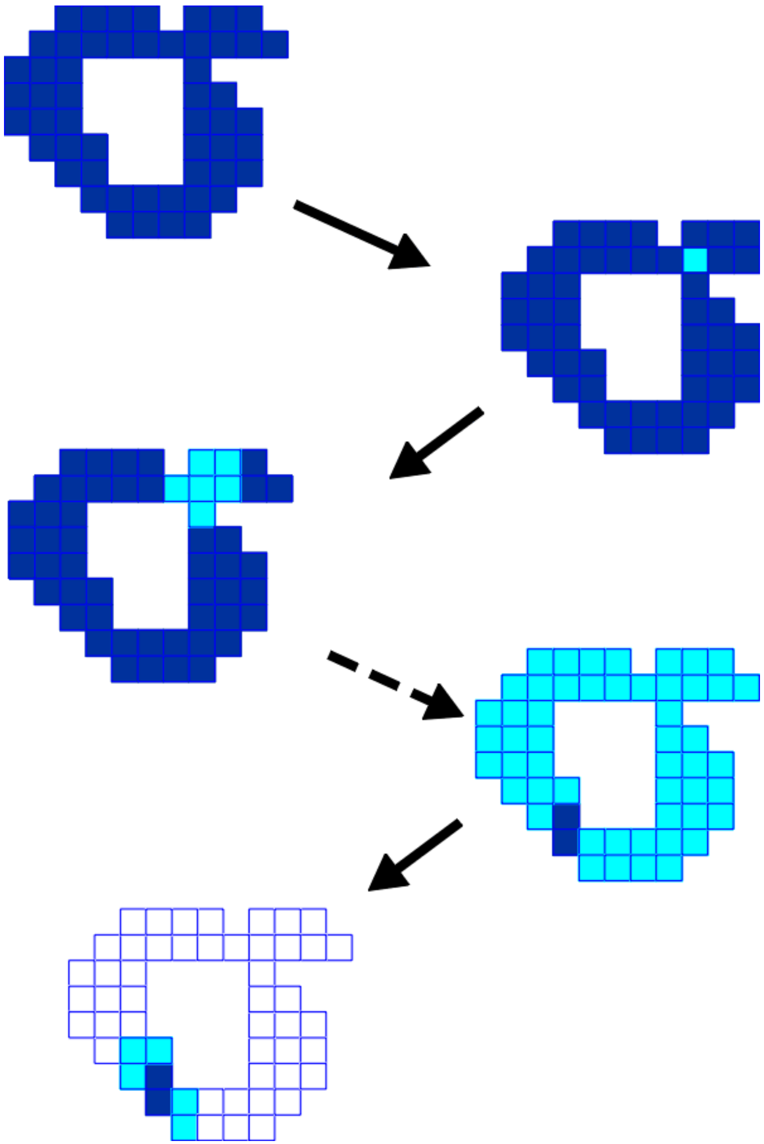


- Jeżeli X jest kostkowy, a $A \subset X$ jest acykliczny to

$$H_n(X) \cong \begin{cases} H_n(X,A), & \text{for } n \geqslant 1 \\ \mathbb{Z} \oplus H_n(X,A), & \text{for } n = 0 \end{cases}$$

- konstrukcja BFS
- używana reprezentacja oparta o pełne kostki!
- test acykliczności poprzez "lookup tables":
  - tablica o 2^{3^d-1} elementach
  - ekstremalnie szybkie rozwiązanie w wymiarze 2 i 3
  - brak wystarczającej pamięci dla wymiarów większych niż 3

Podprzestrzeń acykliczna



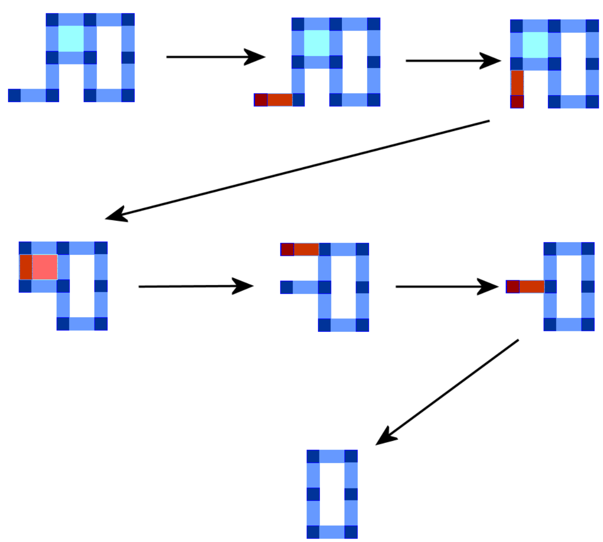
- Jeżeli X jest kostkowy, a $A \subset X$ jest acykliczny to

$$H_n(X) \cong \begin{cases} H_n(X, A), & \text{for } n \geqslant 1 \\ \mathbb{Z} \oplus H_n(X, A), & \text{for } n = 0 \end{cases}$$

- konstrukcja BFS
- używana reprezentacja oparta o pełne kostki!
- test acykliczności poprzez "lookup tables":
  - tablica o 2^{3^d-1} elementach
  - ekstremalnie szybkie rozwiązanie w wymiarze 2 i 3
  - brak wystarczającej pamięci dla wymiarów większych niż 3
- w wyższych wymiarach częściowe testy acykliczności

Redukcje ścian wolnych

foreach σ **do**
  if $\mathrm{cbd}(\sigma) = \{\tau\}$ **then**
    remove(σ);
    remove(τ);
  endif;
endfor;



- ściana wolna - ściana będąca ścianą właściwą dokładnie jednej innej ściany.
- odpowiednik kombinatoryczny retrakcji deformacyjnej
- na poziomie algebraicznym:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \dots \end{bmatrix}$$

Redukcje dualne?

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
. & . & . & . & . & . & . & . & \dots \\
. & . & . & . & . & . & . & . & \dots \\
. & . & . & . & . & . & . & . & \dots
\end{bmatrix}$$

Redukcje dualne? 51

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \dots \end{bmatrix}$$

- wolna kościana - ściana posiadająca dokładnie jedną ścianę w brzegu

Redukcje dualne?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \dots \end{bmatrix}$$

- wolna kościana - ściana posiadająca dokładnie jedną ścianę w brzegu
- teoria homologii jednej przestrzeni dla zbiorów lokalnie zwartych (Steenrod 1940, Massey 1978)

Redukcje dualne?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \ldots \\ . & . & . & . & . & . & . & . & \ldots \end{bmatrix}$$

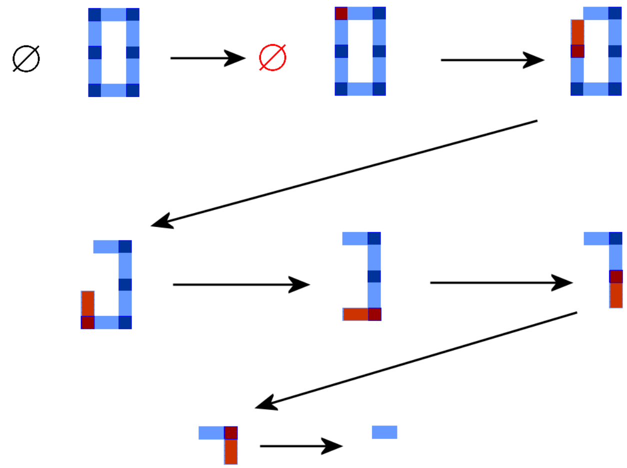
- wolna kościana - ściana posiadająca dokładnie jedną ścianę w brzegu
- teoria homologii jednej przestrzeni dla zbiorów lokalnie zwartych (Steenrod 1940, Massey 1978)
- podejście kombinatoryczne (MM, B. Batko, 2006)

Algorytm koredukcji

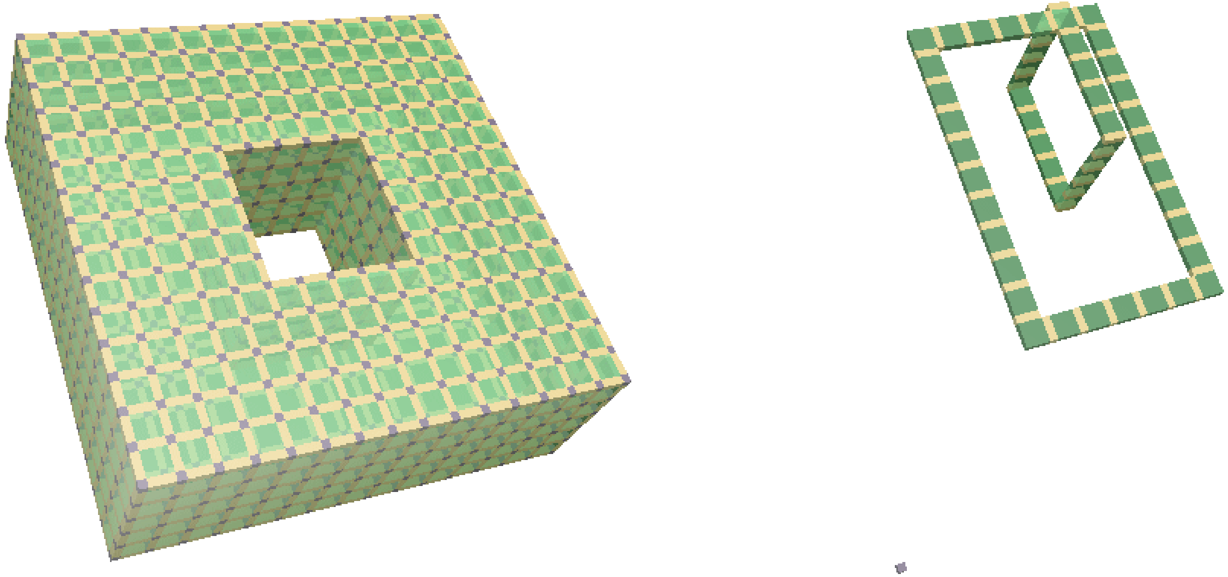
$Q :=$ empty queue;
enqueue(Q,s);
while $Q \neq \emptyset$ **do**
  s:=dequeue(Q);
  if $\mathrm{bd}_S\, s = \{t\}$ **then**
    remove(s);
    remove(t);
    enqueue($Q, \mathrm{cbd}_{\mathcal{K}}\, t$);
  else if $\mathrm{bd}_S\, s = \emptyset$ **then**
    enqueue($Q, \mathrm{cbd}_{\mathcal{K}}\, s$);
  endif;
endwhile ;

Algorytm koredukcji

Q := empty queue;
enqueue(Q,s);
while $Q \neq \emptyset$ **do**
  s:=dequeue(Q);
  if $\mathrm{bd}_S\, s = \{t\}$ **then**
    remove(s);
    remove(t);
    enqueue($Q, \mathrm{cbd}_{\mathcal{K}}\, t$);
  else if $\mathrm{bd}_S\, s = \emptyset$ **then**
    enqueue($Q, \mathrm{cbd}_{\mathcal{K}}\, s$);
  endif;
endwhile ;



Algorytm koredukcji



Generyczny software do liczenia homologii zbiorów oparty o algorytmy redukcji

CAPD::RedHom

Generyczny software do liczenia homologii zbiorów oparty o algorytmy redukcji

- algorytmy AS, CR, AKQ

CAPD::RedHom

Generyczny software do liczenia homologii zbiorów oparty o algorytmy redukcji

- algorytmy AS, CR, AKQ
- liczby Bettiego i torsyjne, generatory homologii, homologie odwzorowań, przedziały persystencji

CAPD::RedHom

Generyczny software do liczenia homologii zbiorów oparty o algorytmy redukcji

- algorytmy AS, CR, AKQ
- liczby Bettiego i torsyjne, generatory homologii, homologie odwzorowań, przedziały persystencji
- współczynniki z $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}_p$

CAPD::RedHom

Generyczny software do liczenia homologii zbiorów oparty o algorytmy redukcji

- algorytmy AS, CR, AKQ
- liczby Bettiego i torsyjne, generatory homologii, homologie odwzorowań, przedziały persystencji
- współczynniki z $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}_p$
- generyczna, ale bardzo szybka implementacja: dla zbiorów kostkowych, kompleksów symplicjalnych, CW kompleksów, ...

CAPD::RedHom

Generyczny software do liczenia homologii zbiorów oparty o algorytmy redukcji

- algorytmy AS, CR, AKQ
- liczby Bettiego i torsyjne, generatory homologii, homologie odwzorowań, przedziały persystencji
- współczynniki z $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}_p$
- generyczna, ale bardzo szybka implementacja: dla zbiorów kostkowych, kompleksów symplicjalnych, CW kompleksów, ...
- dostępna pod adresem: http://redhom.ii.uj.edu.pl

CAPD::RedHom

Generyczny software do liczenia homologii zbiorów oparty o algorytmy redukcji

- algorytmy AS, CR, AKQ
- liczby Bettiego i torsyjne, generatory homologii, homologie odwzorowań, przedziały persystencji
- współczynniki z $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}_p$
- generyczna, ale bardzo szybka implementacja: dla zbiorów kostkowych, kompleksów symplicjalnych, CW kompleksów, ...
- dostępna pod adresem: http://redhom.ii.uj.edu.pl
- Autorzy: P. Dłotko, M. Juda, A. Krajniak, MM, H. Wagner, ...

Eksperymenty numeryczne

	$T \times S^1$	$(S^1)^3$	$S^1 \times K$	$T \times T$
dim	5	6	6	6
wielkość w milionach	0.07	0.10	0.40	2.36
H_0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
H_1	$\mathbb{Z}^3$	0	$\mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}^4$
H_2	$\mathbb{Z}^3$	0	$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}^6$
H_3	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}^4$
H_4				$\mathbb{Z}$
Linbox::Smith	130	350	> 600	> 600
RedHom::Shave+**Linbox**::Smith	0.5	0.1	2.2	> 600
ChomP	1.3	1.7	10	56
RedHom::CR	0.03	0.04	0.26	2.5
ChomP::DMT	0.06	0.15	1.6	5.9
ChomP::CR+DMT	0.04	0.16	1.7	3
RedHom::CR+DMT	0.02	0.08	0.5	1.1

Eksperymenty numeryczne

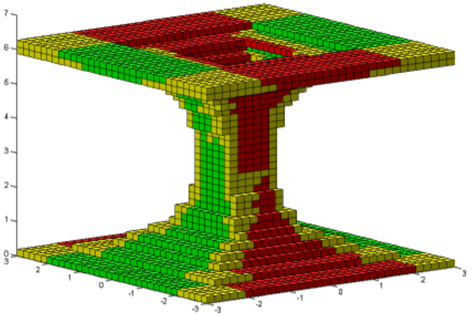
	d4s8f50	d4s12f50	d4s16f50	d4s20f50
dim	4	4	4	4
wielkość w milionach	0.07	0.34	1.04	2.48
H_0	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^2$
H_1	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^{17}$	$\mathbb{Z}^{30}$	$\mathbb{Z}^{51}$
H_2	$\mathbb{Z}^{174}$	$\mathbb{Z}^{1389}$	$\mathbb{Z}^{5510}$	$\mathbb{Z}^{15401}$
H_3	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^{15}$	$\mathbb{Z}^{71}$	$\mathbb{Z}^{179}$
Linbox::Smith	120	> 600	> 600	> 600
RedHom::Shave+**Linbox**::Smith	4	> 600	> 600	> 600
ChomP	1	8.3	41	170
RedHom::CR	0.08	1.4	15	140
ChomP::DMT	0.05	0.38	1.8	5.3
ChomP::CR+DMT	0.03	0.16	0.56	1.4
RedHom::CR+DMT	0.03	0.16	0.58	2.9

Niech X będzie przestrzenią kostkową. Nazwijmy złożonością kostkową X liczbę

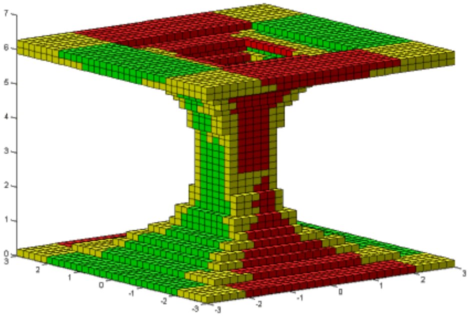
$$z(X) := \min \{ \operatorname{card} \mathcal{X} \mid \mathcal{X} \text{ reprezentacja } X \}.$$

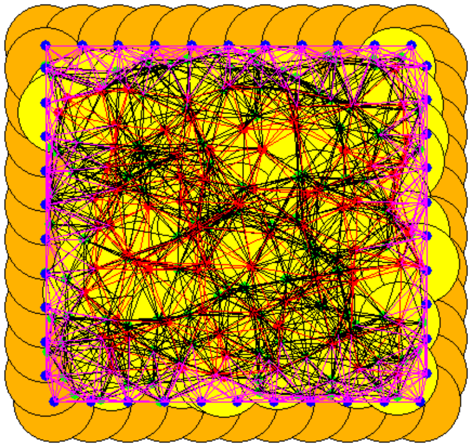
Hipoteza: Złożoność liczenia homologii zbioru kostkowego zależy nieliniowo jedynie od jego złożoności kostkowej, a liniowo od wielkości jego reprezentacji użytej do obliczeń.

Zastosowania

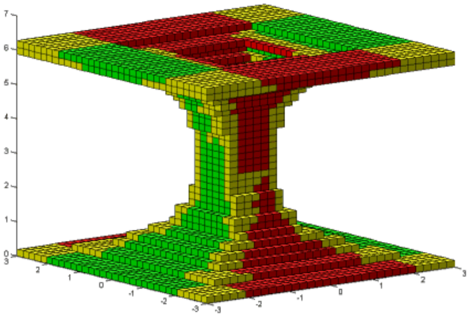


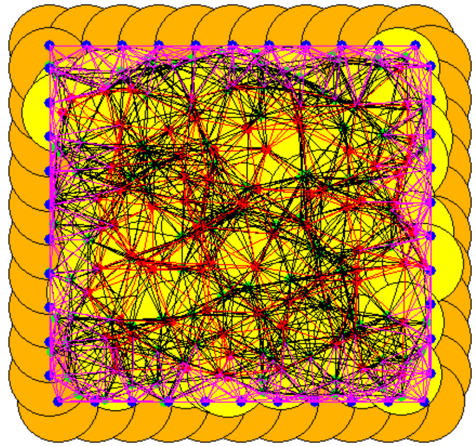
Zastosowania 58

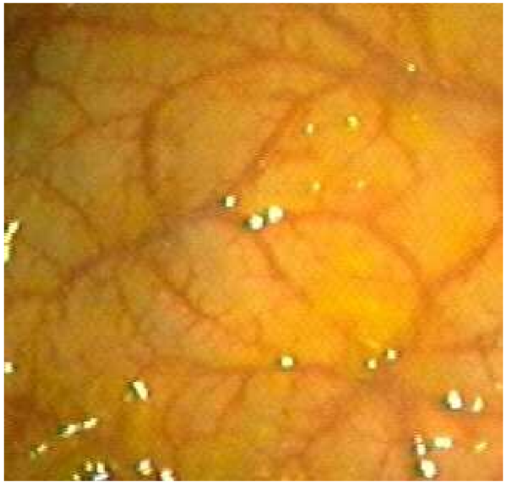




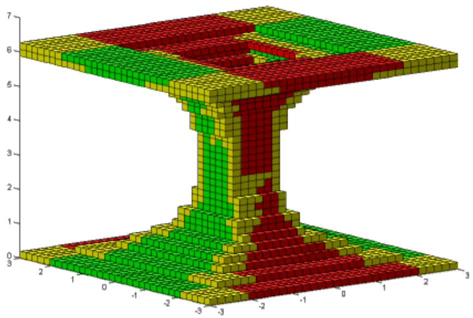
Zastosowania

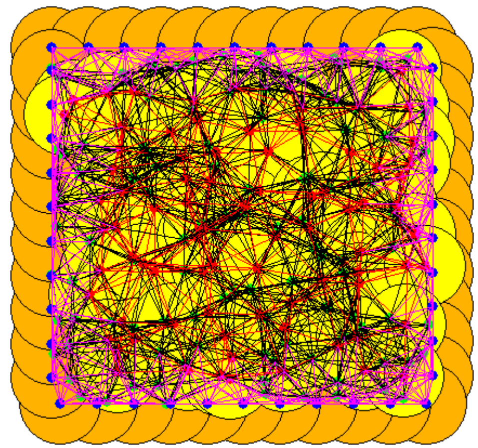


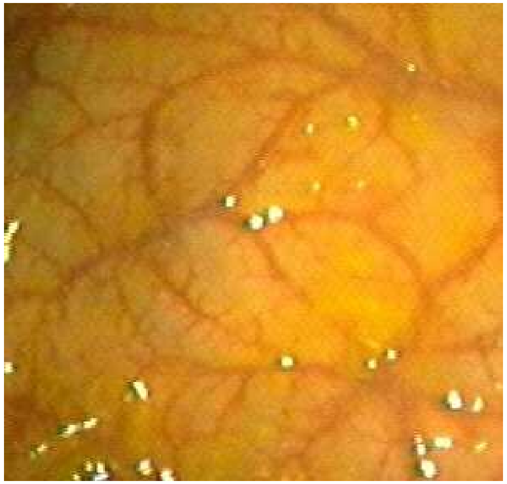


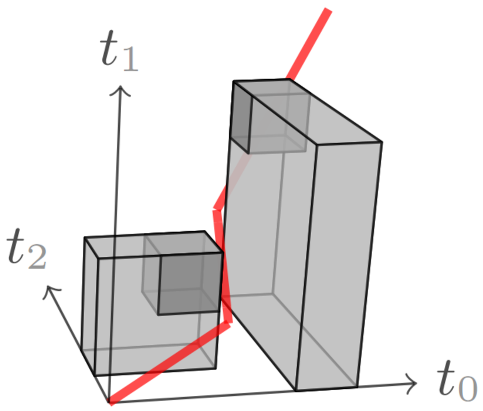


Zastosowania

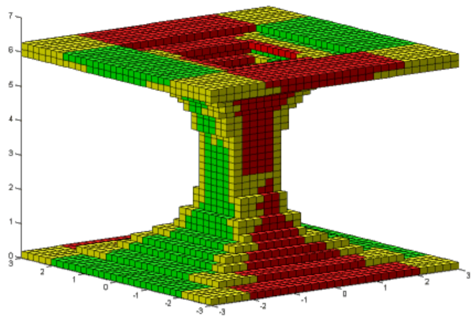


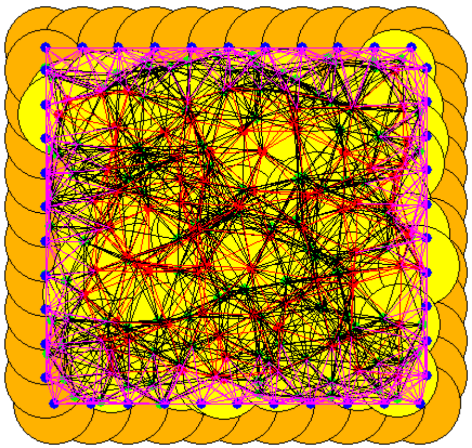


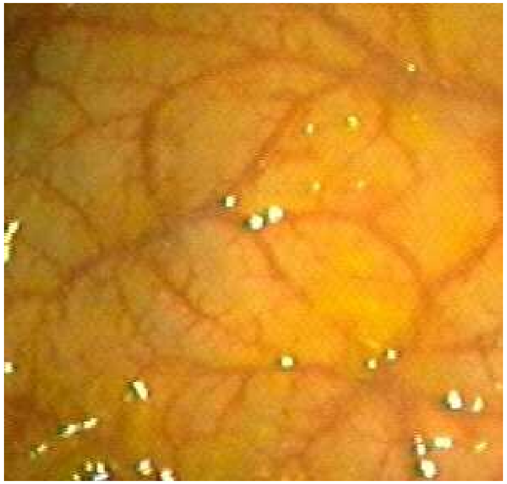


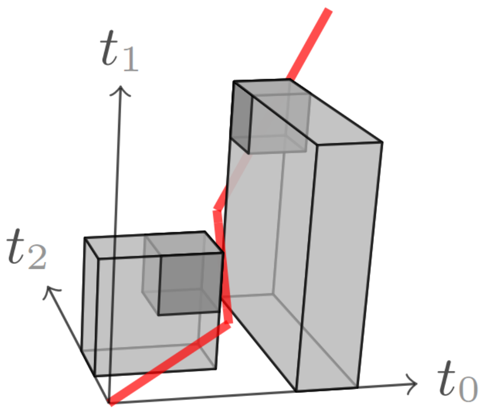


Zastosowania

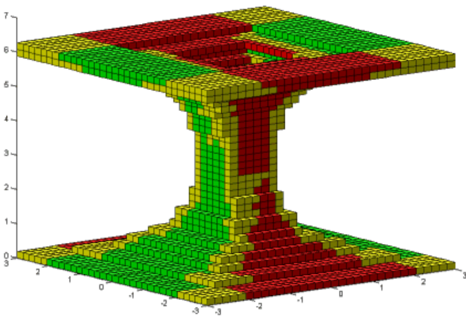


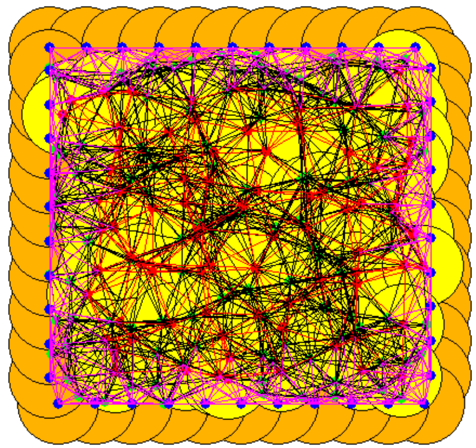


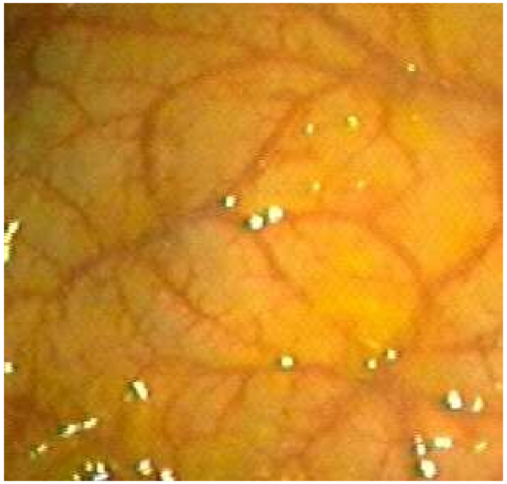


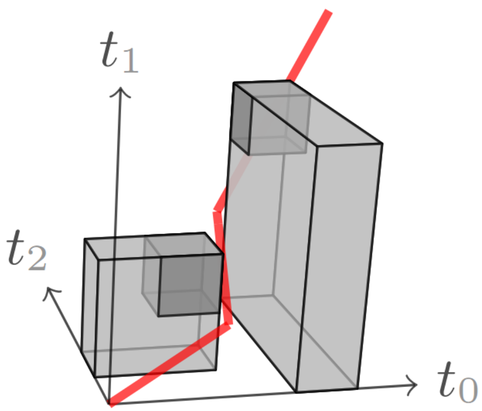


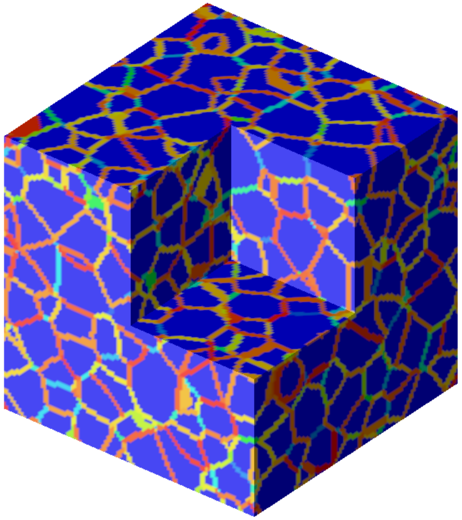
Zastosowania



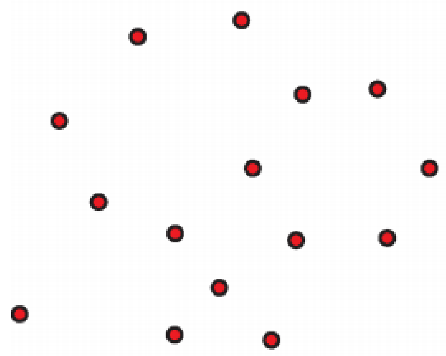






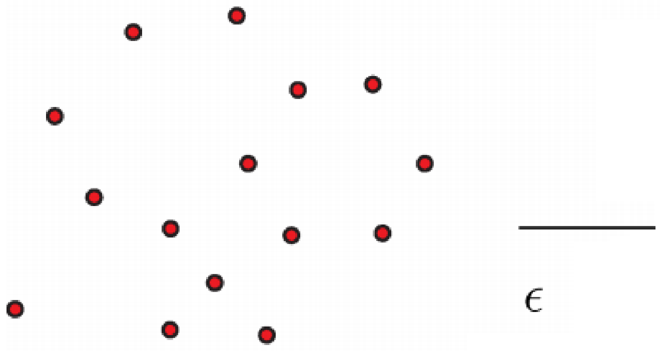


Topologia danych



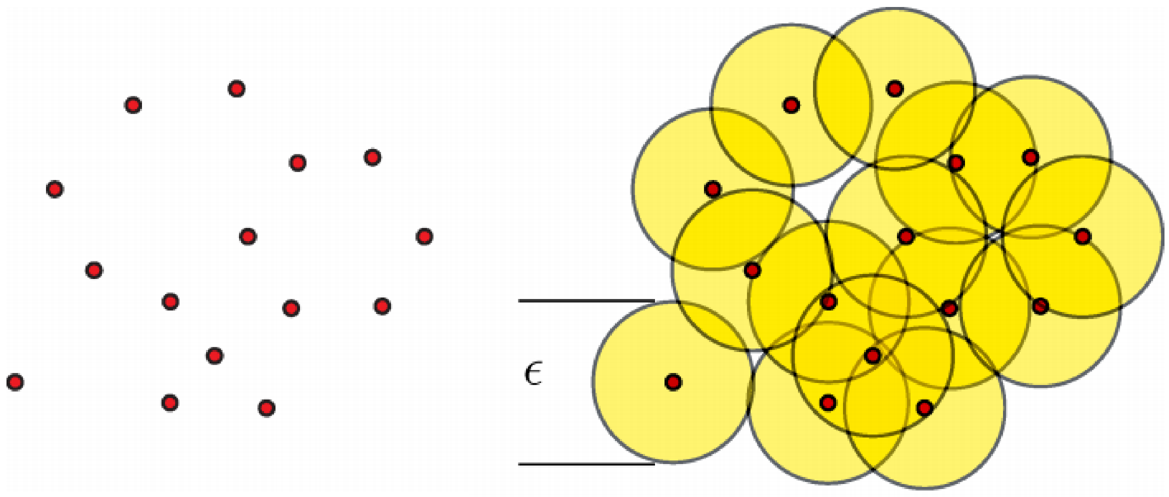
Chmura danych

Topologia danych



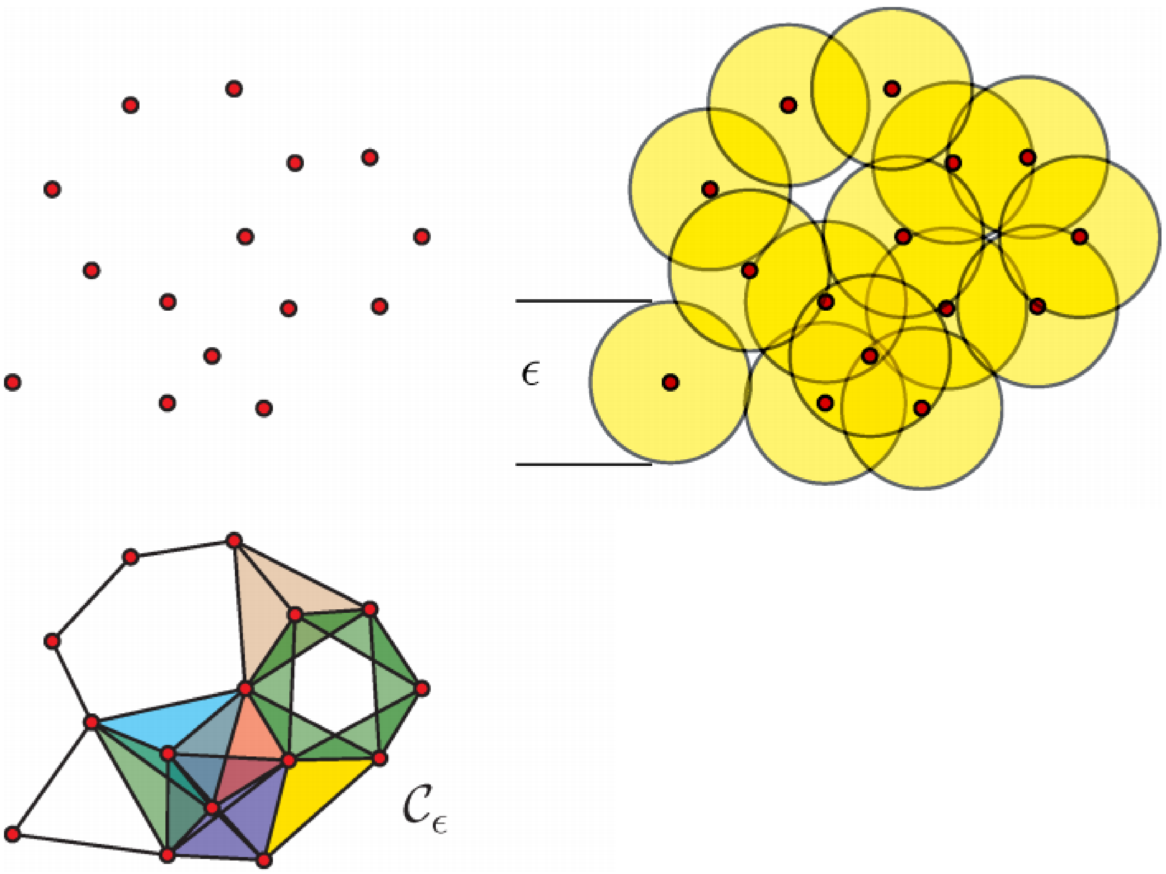
Miarka epsilonowa.

Topologia danych 61



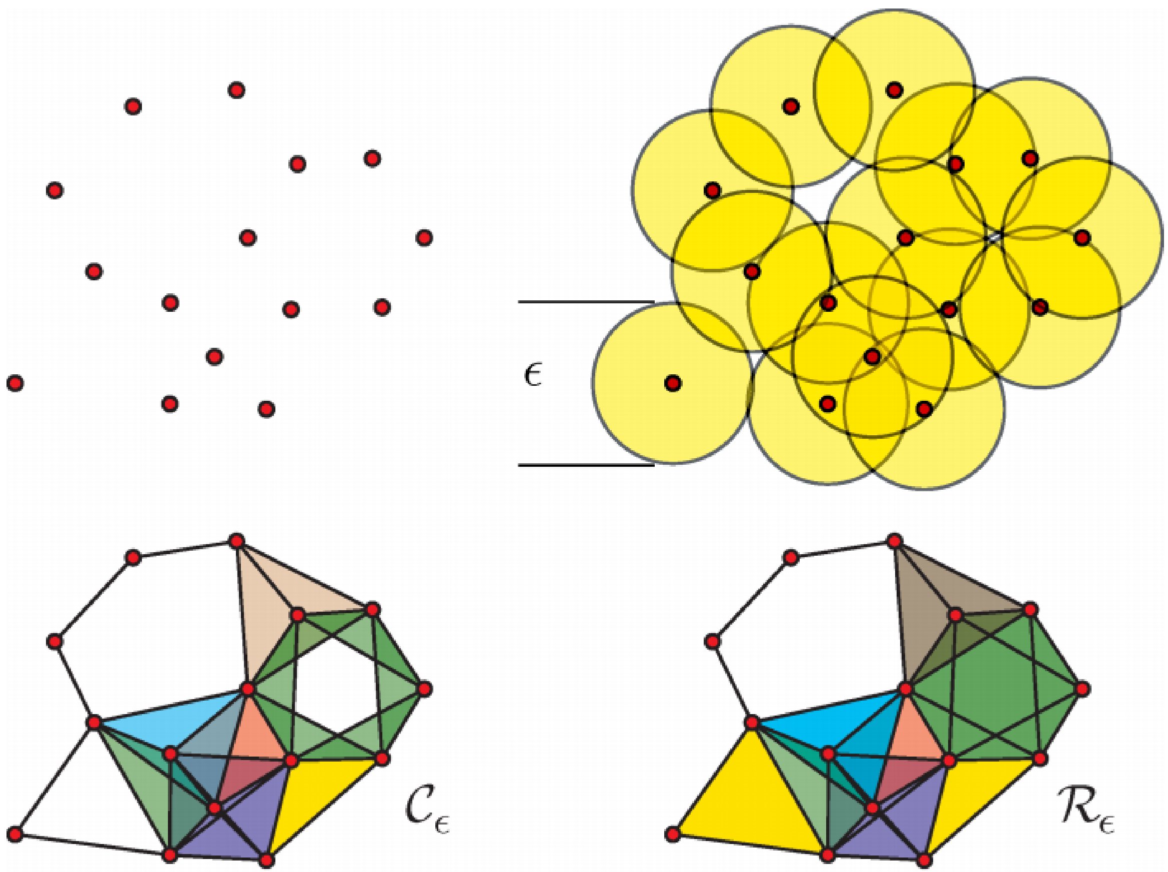
Epsilonowe pokrycie

Topologia danych



Kompleks Čecha.

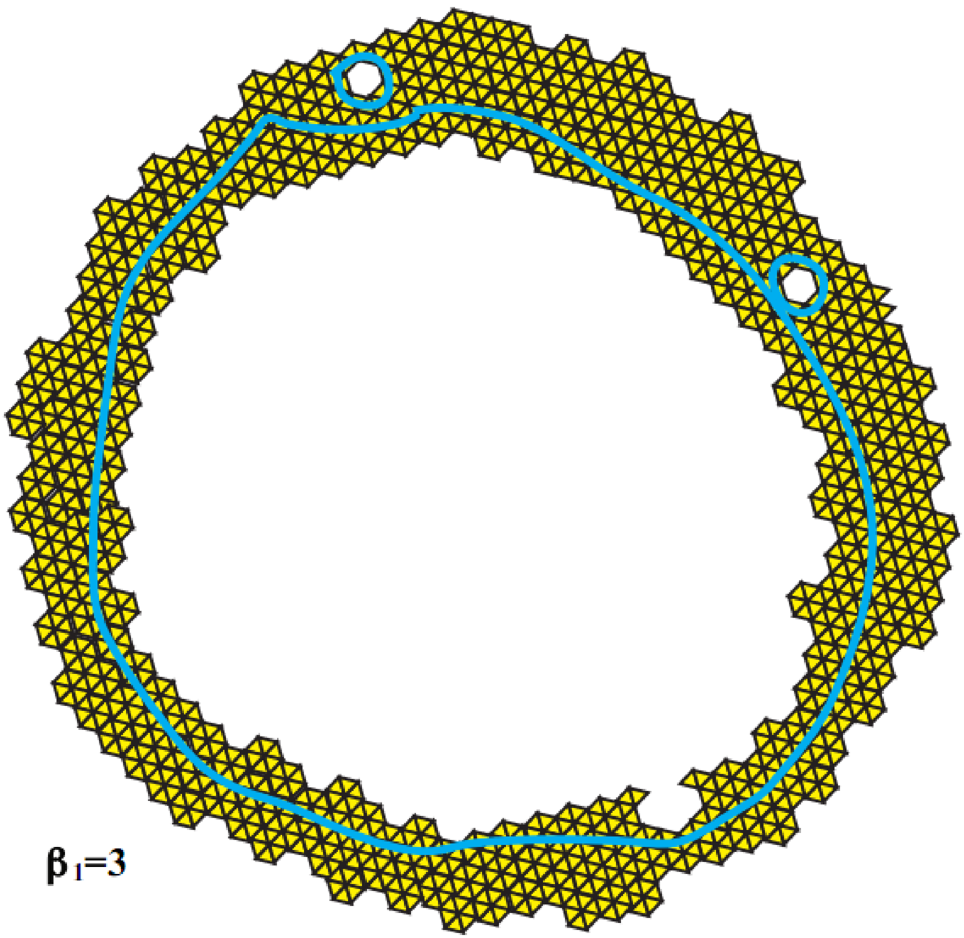
Topologia danych



Kompleks Čecha i kompleks Ripsa.

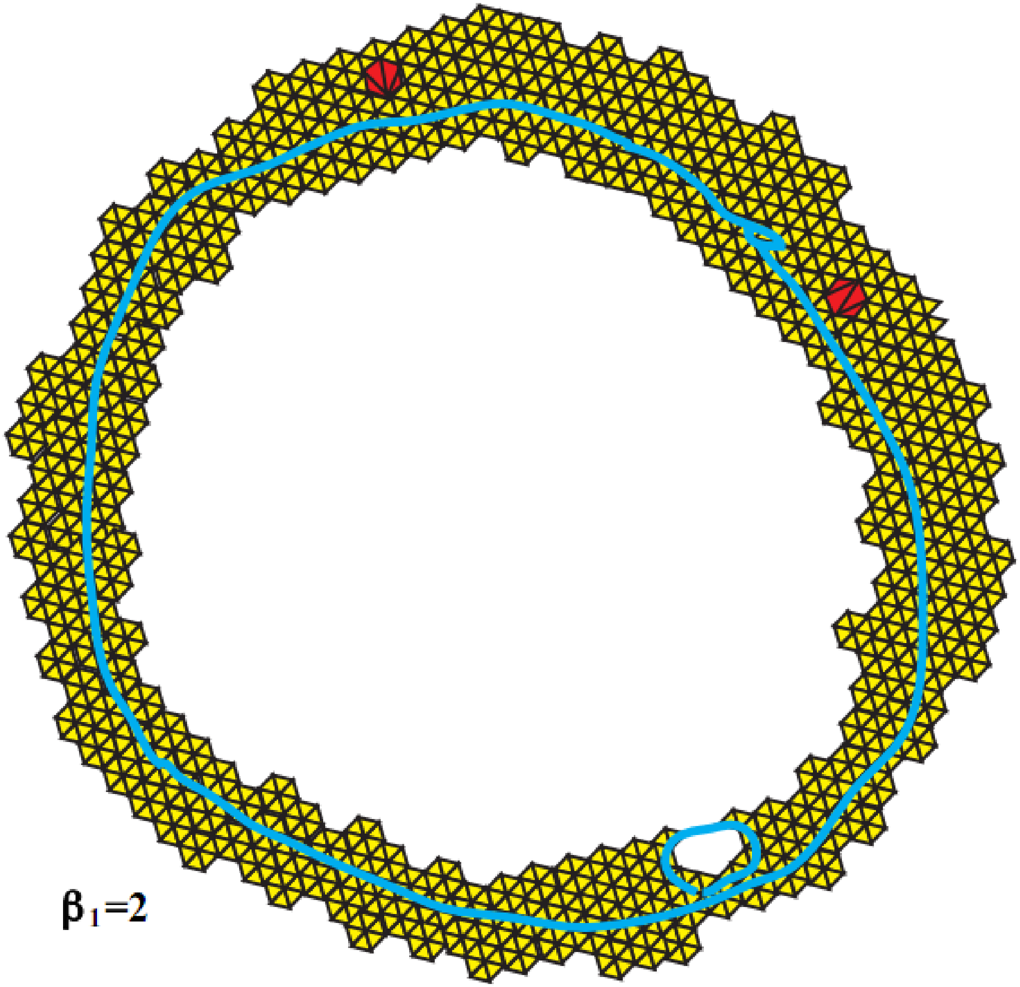
Źródło: R. Ghrist, Barcodes: the persistent topology of data, BAMS **45**(2008),61-75

Topologia danych



Topologiczny szum.

Topologia danych



Trwałość dziur.

Źródło: G. Carlsson, Topology and data, BAMS **46**(2009),255-308

Homologie persystentne

- Niech $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będzie filtracją zbiorów kostkowych.
- (i, j)-persystentna q-ta grupa homologii X_i to

$$PH_q^{i,j}(X) := Z_q(X_i)/B_q(X_j) \cap Z_q(X_i)$$

Homologie persystentne

- Niech $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będzie filtracją zbiorów kostkowych.
- (i, j)-persystentna q-ta grupa homologii X_i to

$$PH_q^{i,j}(X) := Z_q(X_i)/B_q(X_j) \cap Z_q(X_i)$$

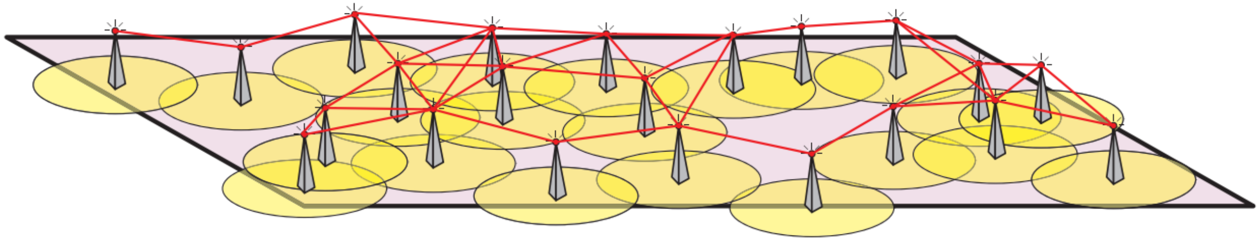
Theorem. (Edelsbrunner, Letscher, Zomorodian, 2002) Let

$$\iota^{i,j} : X_i \to X_j$$

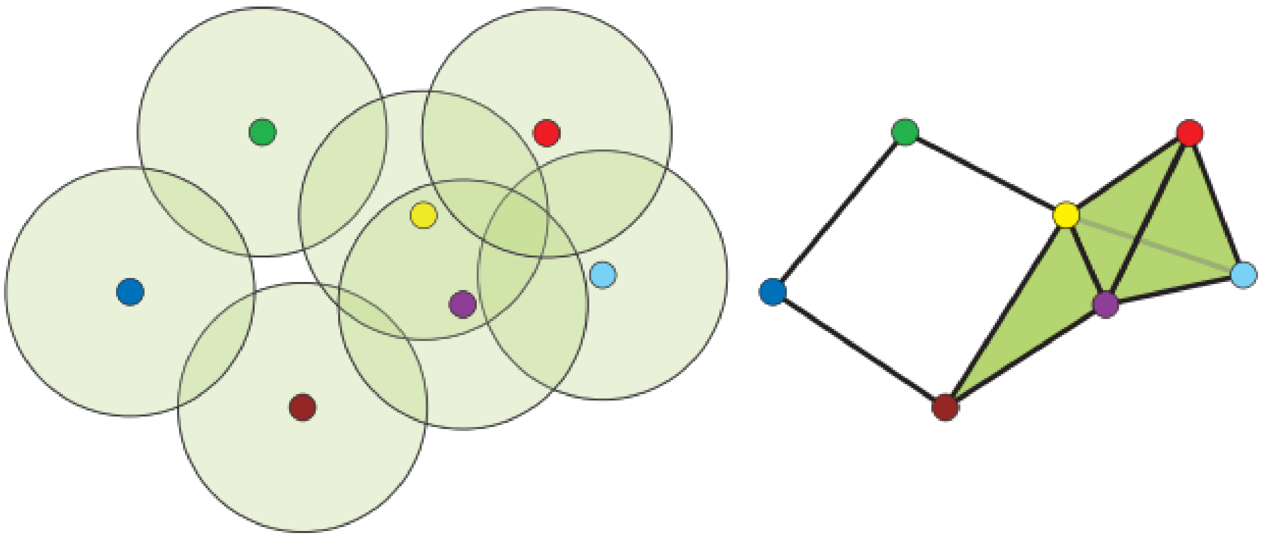
denote the inclusion map. Then

$$PH_q^{i,j}(X) \cong \operatorname{im} H_q(\iota^{i,j}).$$

Sieci sensorowe



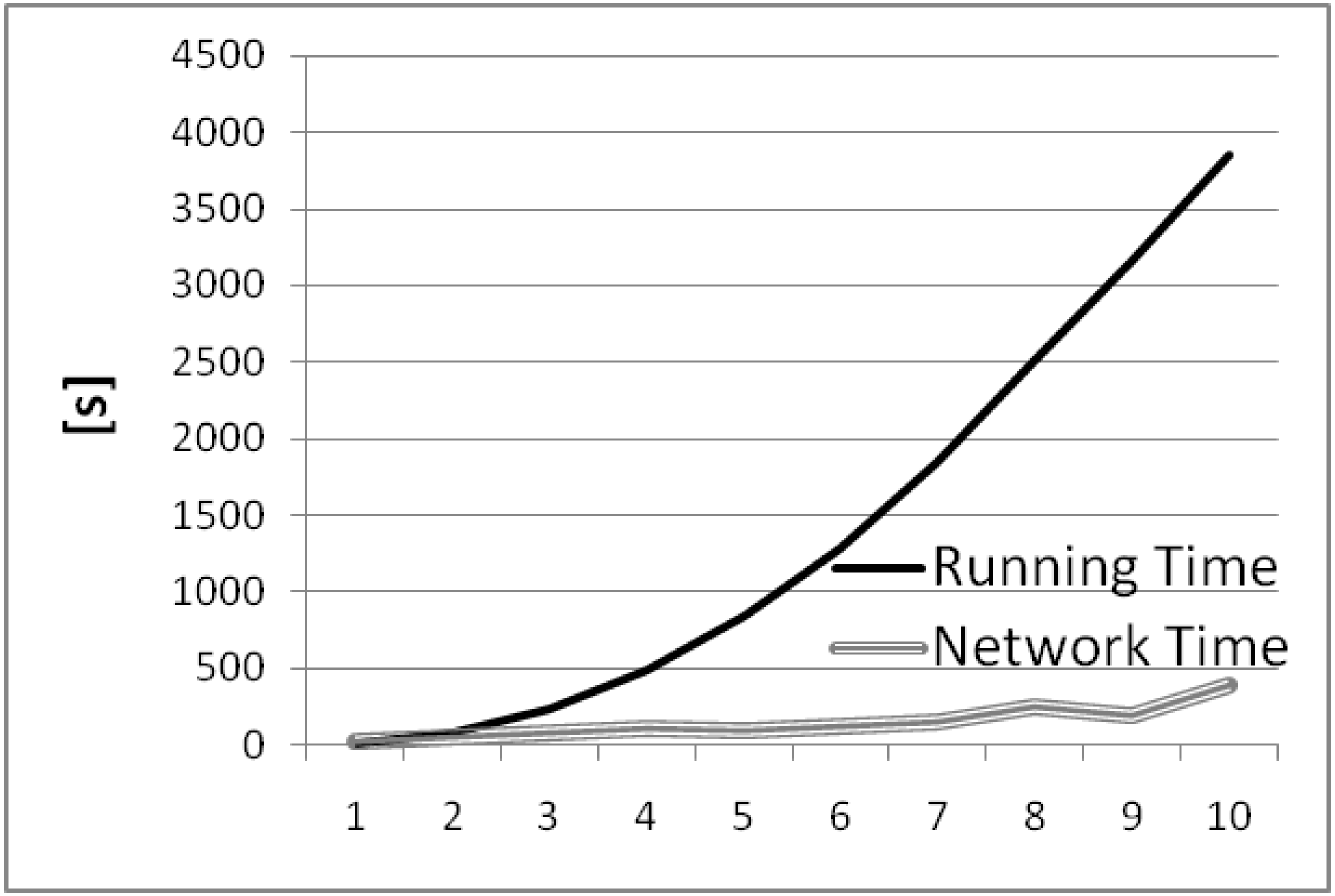
Problem pokrycia



Homologiczne kryterium pokrycia

Theorem. (V. de Silva and R. Ghrist, 2005) Let a planar sensor network in domain $\mathcal{D}$, bounded by a fence cycle z be given. Let $\mathcal{F}$ be the Rips complex of the communication graph of the network. Then all of $\mathcal{D}$ is completely covered by the sensors if there exists a $[\zeta] \in H_2(\mathcal{F}, |z|)$ with $\partial\zeta = z$.

Symulator sieci sensorowych



Współczesna topologia obliczeniowa jest dynamicznie rozwijającą się dziedziną na pograniczu matematyki i informatyki o wielu matematycznych i pozamatematycznych zastosowaniach.