

Równanie Monge'a-Ampère'a

Zbigniew Błocki
(Uniwersytet Jagielloński)

<http://gamma.im.uj.edu.pl/~blocki>

Minikonferencja 3 SSDNM
Kraków, 14 X 2011

Rzeczywiste równanie Monge'a-Ampère'a:

$$\det D^2u = f(x, u, Du)$$

gdzie $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Przykłady:

1. Krzywizna Gaussa hiperpowierzchni $\text{graph } u \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$K = \frac{\det D^2u}{(1 + |Du|^2)^{(n+2)/2}}$$

2. Problem lokalnego zanurzenia M^2 w \mathbb{R}^3

$$\det D^2u = K(1 - |Du|^2) \quad (\text{równanie Darboux})$$

$$\det(u_{ij} - \Gamma_{ij}^k u_k) = \det(g_{ij}) K (1 - g^{pq} u_p u_q)$$

3. Problem Weyla (Pogorełow/Nirenberg): dla dowolnej metryki g na S^2 , t. że $K > 0$, (S^2, g) można zanurzyć w \mathbb{R}^3 .

Słabe rozwiązania (A.D. Aleksandrow)

Jeżeli $u \in C^2(\Omega)$ jest funkcją ściśle wypukłą, to

$$\int_E \det D^2u \, d\lambda = \text{vol}(Du(E)), \quad E \subset \Omega.$$

Dla dowolnej funkcji wypukłej $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy

$$Du(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : u(x) + \langle \cdot - x, y \rangle \leq u\}, \quad x \in \Omega,$$

$$Du(E) = \bigcup_{x \in E} Du(x), \quad E \subset \Omega,$$

$$MA(u)(E) := \text{vol}(Du(E)).$$

Twierdzenie (A.D. Aleksandrow)

Ω - ograniczony, ściśle wypukły obszar w \mathbb{R}^n ,
 $\varphi \in C(\partial\Omega)$, μ - miara regularna na Ω , t.ż. $\mu(\Omega) < \infty$.
Wtedy $\exists!$ rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} u \in CVX(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ MA(u) = \mu \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Globalna regularność

(Kryłow/Caffarelli-Nirenberg-Spruck)

$\partial\Omega \in C^\infty$, silnie wypukły, $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$,

$\mu = fd\lambda$, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $f > 0$

$\Rightarrow u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Lokalna regularność

Przykład (Pogorełow): $u(x) = (x_1^2 + 1)|x'|^{2\beta}$, $\beta \geq 0$,
gdzie $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Wtedy

$$\det(u_{x_i x_j}) = c(1+x_1^2)^{n-2} [(2\beta-1) - (2\beta+1)x_1^2] |x'|^{2(\beta n+1-n)}.$$

- u wypukła w otoczeniu 0 $\Leftrightarrow \beta > 1/2$
- $\det(u_{x_i x_j})$ - gładkie i > 0 , gdy $\beta = 1 - 1/n$.

Zatem $u(x) = (x_1^2 + 1)|x'|^{2(1-1/n)}$ (gdzie $n \geq 3!$) spełnia

$$MA(u) \in C^\infty, \quad MA(u) > 0, \quad u \notin W_{loc}^{2,n(n-1)/2}.$$

Twierdzenie (Urbas) $n \geq 3$, $u \in CVX \cap W_{loc}^{2,p}$ dla
pewnego $p > n(n-1)/2$. Wtedy

$$(*) \quad MA(u) \in C^\infty, \quad MA(u) > 0 \Rightarrow u \in C^\infty.$$

Twierdzenie (Pogorełow) $n = 2 \Rightarrow (*)$

Zespolone równanie Monge'a-Ampère'a (CMA)

$$\det(u_{j\bar{k}}) = f(z, u, Du),$$

gdzie $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, jest funkcją plurisubharmoniczną (psh), tj. $(u_{j\bar{k}}) \geq 0$

Przykłady zastosowań geometrycznych:

1. Krzywiznę Ricciego na rozmaitościach kählerowskich można wyrazić przy pomocy operatora MA, hipoteza Calabiego oraz problem istnienia metryk Kählera-Einsteina sprowadzają się do rozwiązania niezdegenerowanego CMA (Yau).
2. Równanie dla geodezyjnych w przestrzeni metryk kählerowskich jest równoważne jednorodnemu CMA (Mabuchi, Semmes, Donaldson).

Słabe rozwiązania

Przykład (Shiffman-Taylor/Kiselman)

$$u(z) = (-\log |z_1|)^{1/n} (|z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 - 1)$$

- u jest psh w otoczeniu 0
- u jest gładka na $\{z_1 \neq 0\}$
- $\det(u_{j\bar{k}})$ nie jest całkowalne w pobliżu $\{z_1 = 0\}$

$$d = \partial + \bar{\partial}, \quad d^c = i(\bar{\partial} - \partial), \quad dd^c = 2i\partial\bar{\partial}$$

$$(dd^c u)^n = dd^c u \wedge \cdots \wedge dd^c u = 4^n n! \det(u_{j\bar{k}}) d\lambda$$

Twierdzenie (Bedford-Taylor) Dla $u \in PSH \cap L_{loc}^\infty$ można dobrze zdefiniować miarę regularną $(dd^c u)^n$, t.ż. jest ona ciągła dla ciągów monotonicznych.

Dziedzina zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a

$u \in \mathcal{D}$ jeżeli \exists miara μ , t.że $\forall u_j \in PSH \cap C^\infty$,
 $u_j \downarrow u$, mamy $(dd^c u_j)^n \rightsquigarrow \mu$

Można łatwo pokazać, że \mathcal{D} jest maksymalną podklasą klasy funkcji psh, w której można dobrze zdefiniować operator Monge'a-Ampère'a tak, że jest on ciągły względem ciągów malejących.

$$n = 2$$

$$\int \varphi (dd^c u)^2 = - \int du \wedge d^c u \wedge dd^c \varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty.$$

Twierdzenie (B.) $n = 2 \Rightarrow \mathcal{D} = PSH \cap W_{loc}^{1,2}$
Można również scharakteryzować \mathcal{D} dla $n \geq 3$.

Problem Dirichleta

Twierdzenie (Bedford-Taylor)

Ω - ograniczony, silnie pseudowypukły obszar w \mathbb{C}^n

$f \in C(\bar{\Omega})$, $f \geq 0$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$

Wtedy $\exists!$ rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} u \in PSH(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \\ (dd^c u)^n = f d\lambda \\ u = \varphi \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Kołodziej: wystarczy założyć, że $f \in L^p(\Omega)$ dla pewnego $p > 1$

B.: wystarczy założyć, że Ω jest hiperwypukły i że φ można przedłużyć do pewnego $v \in PSH(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Globalna regularność

(Kryłow/Caffarelli-Kohn-Nirenberg-Spruck)

$\partial\Omega \in C^\infty$, silnie pseudowypukły, $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$,
 $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $f > 0 \Rightarrow u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Twierdzenie (Cheng-Yau, Mok-Yau)

Ω - ograniczony obszar pseudowypukły w \mathbb{C}^n

Wtedy $\exists!$ rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} u \in PSH \cap C^\infty(\Omega) \\ (\det(u_{j\bar{k}}) = e^{(n+1)u} \\ u = \infty \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

$u_{j\bar{k}} dz^j d\bar{z}^k$ jest jedyną zupełną metryką
Kählera-Einsteina na Ω .

Lokalna regularność

Przykład: $u(z) = (1 + |z_1|^2)|z'|^{2(1-1/n)} \in PSH(\mathbb{C}^n)$,
$$\det(u_{j\bar{k}}) = c(1 + |z_1|^2)^{n-2}.$$

W szczególności, dla $u(z_1, z_2) = 2(1 + |z_1|^2)|z_2|$
mamy $\det(u_{j\bar{k}}) = 1$.

Przypadek $n = 2$ dla zespolonego równania MA nie
jest wyjątkowy!

$$u \in W_{loc}^{2,p} \Leftrightarrow p < n(n-1), \quad u \in C^{1,\alpha} \Leftrightarrow \alpha \leq 1 - \frac{2}{n}.$$

Twierdzenie (B.-S. Dinew) $u \in PSH \cap W_{loc}^{2,p}$ dla
pewnego $p > n(n-1)$. Wtedy

$$\det(u_{j\bar{k}}) \in C^\infty, \quad \det(u_{j\bar{k}}) > 0 \Rightarrow u \in C^\infty.$$

CMA w geometrii kählerowskiej

(M, ω) - zwarta rozmaitość kählerwska wymiaru n ,
tzn. lok. $\omega = g_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k$, $\omega = \bar{\omega}$, $\omega > 0$, $d\omega = 0$

$$Ric_\omega = -dd^c(\log \det(g_{j\bar{k}}))$$

$$Ric_\omega - Ric_{\tilde{\omega}} = dd^c \log \frac{\tilde{\omega}^n}{\omega^n}$$

$$c_1(M) = \{Ric_\omega\}$$

Hipoteza Calabiego: Odwzorowanie

$$\{\omega\} \ni \tilde{\omega} \longmapsto Ric_{\tilde{\omega}} \in c_1(M)$$

jest surjeksią.

Twierdzenie (Yau) (M, ω) - zwarta rozm. kählerowska
 $f \in C^\infty(M)$, $f > 0$, t.ż. $\int_M f \omega^n = \int_M \omega^n$
Wtedy $\exists!$ rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} \varphi \in C^\infty(M), \omega + dd^c \varphi > 0 \\ (\omega + dd^c \varphi)^n = f \omega^n \\ \int_M \varphi \omega^n = 0. \end{cases}$$

Słabe rozwiązania

Jednoznaczność (B.): $\varphi, \psi \in L^\infty(M)$, $\omega + dd^c \varphi \geq 0$,
 $\omega + dd^c \psi \geq 0$, $(\omega + dd^c \varphi)^n = (\omega + dd^c \psi)^n$
 $\Rightarrow \varphi - \psi = \text{const}$

Istnienie (Kołodziej): $f \in L^p(M)$ dla pewnego $p > 1$
($f \geq 0$) $\Rightarrow \exists$ ciągłe rozwiązanie